Дальневосточный математический журнал. 2017. Т. 17. № 2. С. 147–151

УДК 511.334+511.335, 511,334
MSC2010 11F03, 11F12

© В. А. Быковский[1]

О распределении целых точек на гиперболоиде

В работе предложен новый метод изучения целых точек на гиперболоидах (задача Линника). Он базируется на спектральной теории автоморфных функций. При этом получаются принципиально новые оценки остаточных членов со степенным понижением.

Ключевые слова: *распределение целых точек на гиперболоиде, спектральная теория автоморфных функций, L-ряды автоморфных форм, функционалы Шинтани.*

Пусть $K_{\mathbb{Z}}(d)=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3 \,\middle|\, b^2-4ac=d\right\}$ — множество целых точек на гиперболоиде $\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{Z}^3 \,\middle|\, x_2^2-4x_1x_3=d\right\}$, двуполостном при $d<0$ и однополостном при $d>0$.

Далее $d\equiv 0,1 \pmod 4$ $(\Leftrightarrow K_{\mathbb{Z}}(d)$ — непустое множество). Такие целые $d\neq 0$ называют дискриминантами, так как элементы $K_{\mathbb{Z}}(d)$ параметризуют бинарные квадратичные формы $Q(u,v)=au^2+buv+cv^2$ дискриминанта d с целыми коэффициентами.

Справедливо каноническое разложение $d=Dn^2$ с целым $D\equiv 0,1 \pmod 4$ и наибольшим (из возможных) натуральным n — кондуктором d. Если $n=1$, то $d=D$ — фундаментальный дискриминант.

Абсолютно сходящийся в полосе $\mathrm{Re}(s)>1$ ряд Дирихле

$$\sum_{c\,=\,1}^{\infty}\left(\sum_{b \,(\mathrm{mod}\, 2c)}\delta_{4c}(b^2-d)\right)\frac{1}{c^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}G_d(s) \qquad (d\neq n^2)$$

определяет целую функцию $G_d(s)$, которая для фундаментального $d=D$ совпадает с

$$\sum_{c\,=\,1}^{\infty}\left(\frac{D}{c}\right)\frac{1}{c^s}.$$

Пусть $\varphi(x,y)$ — бесконечно дифференцируемая комплекснозначная функция на $(-\infty,\infty)\times(0,\infty)$ с компактным носителем. Так как (a,b,c) и $(-a,-b,-c)$ только одновременно принадлежат $K_{\mathbb{Z}}(d)$, то можно ограничиться изучением распределения целых точек множества

$$K_{\mathbb{Z}}^{+}(d)=\left\{(a,b,c)\in K_{\mathbb{Z}}(d) \,\middle|\, c>0\right\}.$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: vab@iam.khv.ru

Теорема. *При любом* $\varepsilon>0$ *и* $d\neq n^2$

$$\sum_{(a,b,c)\in K_{\mathbb{Z}}^{+}(d)}\varphi\left(\frac{b}{2c},\frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right)=\frac{3}{\pi}\cdot\sqrt{|d|}G_d(1)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(x,y)\frac{dx\,dy}{y^2}+O_{\varphi,\varepsilon}\left(|d|^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right).$$

Первые нетривиальные оценки остаточного члена получены эргодическим методом Линника для фундаментальных дискриминантов D и изложены в монографии [1]. Они доказаны в предположении, что $\left(\frac{D}{p}\right)=1$ для некоторого фиксированного простого $p>2$, и отличаются от тривиальных лишь на некоторую небольшую степень $\log|d|$.

В случае $d<0$ каждой тройке $\omega=(a,b,c)\in K_{\mathbb{Z}}^{+}(d)$ сопоставим комплексное число $z(\omega)=\frac{b}{2c}+\frac{\sqrt{d}}{2c}$ на верхней полуплоскости $H=\left\{z=x+iy\,\middle|\,x\in(-\infty,\infty),y\in(0,\infty)\right\}$ и положим

$$H(d)=\left\{z(\omega)\,\middle|\,\omega\in K_{\mathbb{Z}}^{+}(d)\right\}.$$

Модулярная группа

$$\Gamma=SL_2(Z)=\left\{M=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}\,\middle|\,m_{ij}\in Z;\,\det(M)=1\right\}$$

действует слева на H по правилу

$$z\to M\cdot z=\frac{m_{11}z+m_{12}}{m_{21}z+m_{22}}.$$

Правое действие Γ на $K_{\mathbb{Z}}^{+}(d)$ определяется по формуле $(a,b,c)\cdot M=(a',b',c')$, где

$$a'u^2+b'uv+c'v^2=Q(m_{11}u+m_{21}v,\,m_{21}u+m_{22}v)=(Q\cdot M)(u,v)$$

с $Q(u,v)=qu^2+buv+cv^2$.

Еще Дирихле (см. “Лекции по теории чисел”) обратил внимание на коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} K_{\mathbb{Z}}^{+}(d) \arrow[r, "M"] \arrow[d, "z(\omega)"] & K_{\mathbb{Z}}^{+}(d) \arrow[d, "z(\omega)"] \\ H(d) \arrow[r, "M"] & H(d) \end{tikzcd}$$

для любой матрицы M из Γ.

Мы можем рассматривать $\varphi(x,y)$ как функцию $\varphi(z)$ на верхней полуплоскости H. Тогда

$$\sum_{(a,b,c)\in K_{\mathbb{Z}}^{+}(d)}\varphi\left(\frac{b}{2c},\frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right)=\sum_{\omega\in K_{\mathbb{Z}}^{+}(d)}\varphi(z(\omega))=$$

$$=\sum_{\omega\in K_{\mathbb{Z}}^{+}(d)}\frac{1}{|\Gamma_\omega|}\cdot\sum_{M\in\Gamma}\varphi(z(\omega\cdot M))=\sum_{z\in\Gamma\backslash H(d)}\frac{1}{|\Gamma_\omega|}\Phi(z),$$

где $\Phi(z)=\sum\limits_{M\in\Gamma}\varphi(M\cdot z)$.

Гильбертово пространство $L_2(\Gamma\backslash H)$ состоит из функций $f\colon H\to C$, для которых

$$f(M\cdot z)=f(z)\qquad \forall\, M\in\Gamma,$$

$$\iint\limits_{\Gamma\backslash H}|f(z)|^2\,\frac{dx\,dy}{y^2}<\infty;\qquad \langle f_1,f_2\rangle=\iint\limits_{\Gamma\backslash H}f_1(z)\overline{f_2(z)}\,\frac{dx\,dy}{y^2}.$$

На $L_2(\Gamma\backslash H)$ действует $SL_2(R)$ — инвариантный оператор Лапласа

$$\Delta=\,-\,y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Пусть $L_2^0(\Gamma\backslash H)$ состоит из всех $f\in L_2(\Gamma\backslash H)$ с $\int\limits_0^1 f(x+iy)dx=0$ для почти всех $y\in(0,\infty)$. Из собственных функций Δ в $L_2^0(\Gamma\backslash H)$ можно выбрать ортонормированный базис $f_1(z),f_2(z),\dots,f_j(z),\dots$. При этом $\Delta f_j(z)=\lambda_j f_j(z)$ и $\frac14<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\dots\leqslant\lambda_j\leqslant\dots$ с $\lambda_j=$ $=12j+o(j)$.

Разложение $f\in L_2(\Gamma\backslash H)$ по спектру Δ имеет вид

$$f(z)=\frac{2}{\pi}\iint\limits_{\Gamma\backslash H}f(z)\frac{dx\,dy}{y^2}+\sum_{j\,=\,1}^{\infty}\langle f,f_j\rangle f_j(z)+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)\,=\,\frac12}\langle f,E(\cdots;s)\rangle E(z;s)\,ds,$$

где $E(z;s)=\sum\limits_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\mathrm{Im}^s(M\cdot z)$ — ряд Эйзенштейна и $\Gamma_\infty=\left\{\pm\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\,\middle|\,n\in Z\right\}$ — параболическая подгруппа в Γ. Несложные вычисления показывают, что

$$\sum_{M\in\Gamma}\varphi(M\cdot z)=\frac{3}{\pi}\iint\limits_{H}\varphi(z)\frac{dx\,dy}{y^2}+\sum_{j\,=\,1}^{\infty}\Theta_j(\varphi)f_j(z)+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)\,=\,\frac12}\Theta(\varphi;s)E(z;s)\,ds,$$

где для любого положительного A

$$\Theta_j(\varphi)=\iint\limits_{H}\varphi(z)\overline{f_j(z)}\,\frac{dx\,dy}{y^2}\ll_A\lambda_j^{-A},$$

$$\Theta_j\left(\varphi;\frac12+it\right)\;=\;\iint\limits_{H}\varphi(z)E\left(z;\frac12-it\right)\,\frac{dx\,dy}{y^2}\ll_A\left(\frac14+t^2\right)^{-A}.$$

В результате находим

$$\sum_{(a,b,c)\in K_{\mathbb{Z}}^{+}(d)}\varphi\left(\frac{b}{2c},\frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right)=\frac{3}{\pi}\left(\sum_{z\in\Gamma\backslash H(d)}\frac{1}{|\Gamma_z|}\right)\cdot\iint\limits_{H}\varphi(z)\,\frac{dx\,dy}{y^2}+$$

$$+\sum_{j\,=\,1}^{\infty}\Theta_j(\varphi)\Omega_d(f_j)+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)\,=\,\frac12}\Theta(\varphi;s)\Omega_d\bigl(E(\cdots;s)\bigr)\,ds,$$

$$\Omega_d(f)=\sum_{z\in\Gamma\backslash H(d)}\frac{1}{|\Gamma_z|}f(z).$$

Для некоторого $B>0$ и $\forall\varepsilon>0$ (см. [2])

$$\Omega_d\left(E\left(\cdots;\frac{1}{2}+it\right)\right)\underset{\varepsilon}{\ll}\left(\frac{1}{4}+t^2\right)^B|d|^{\frac{1}{3}+\varepsilon},\qquad \Omega_d(f_j)\underset{\varepsilon}{\ll}\lambda_j^B|d|^{\Delta+\varepsilon}.$$

В работах [3], [4] была получена оценка с $\Delta=\frac{1}{2}-\frac{1}{14}$, в [5] $\Delta=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}$ и в [6] $\Delta=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$.

Пусть

$$\widehat{\varphi}(t,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(x,y)e^{-itx}y^{s-1}\,dx\,dy$$

и

$$S_n^{(d)}(c)=\sum_{b(\bmod 2c)}\delta_{4c}(b^2-d)e^{2\pi i\frac{bn}{2c}}.$$

Тогда

$$\sum_{(a,b,c)\in K_{\mathbb{Z}}^{+}(d)}\varphi\left(\frac{b}{2c},\frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right)=A_\varphi(d)+R_\varphi(d),$$

где

$$A_\varphi(d)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)\,=\,2}\left(\sum_{c\,=\,1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right)^s S_0^{(d)}(c)\right)\widehat{\varphi}(0,-\,s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)\,=\,2}\left(\frac{|d|}{4}\right)^{\frac{s}{2}}\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}G_d(s)\widehat{\varphi}(0,-\,s)\,ds=$$

$$=\frac{3}{\pi^2}\sqrt{|d|}G_d(1)\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(x,y)\frac{dx\,dy}{y^2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}+\varepsilon}\ldots\,ds$$

и

$$R_\varphi(d)\sum_{\substack{n\,=\,-\infty\\ n\,\neq\,0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\mathrm{Re}(s)\,=\,2}\left(\sum_{c\,=\,1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{|d|}}{2c}\right)^s S_n^{(d)}(c)\right)\widehat{\varphi}(2\pi n,-\,s)\,ds.$$

Пусть $\psi:(0,\infty)\to C$ бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем и

$$G_\psi^{(n)}(d)=\sum_{c\,=\,1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{c}}S_n^{(d)}(c)\psi\left(\frac{\pi|n|\sqrt{|d|}}{c}\right),\qquad n\neq 0.$$

В работе [7] было получено разложение для таких сумм по спектру автоморфного лаплассиана. С его помощью можно доказать оценку остаточного члена в теореме для положительных дискриминантов, отличных от квадратов.

Список литературы

[1] Ю. В. Линник, *Эргодические свойства алгебраических полей*, Ленинград, 1967, 208 с.

[2] D. A. Burgess, “On character sums and L-series. II”, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **13**, (1963), 524–536.

[3] H. Ivaniec, “Fourier coefficients of modular forms of half integral weight”, *Invent. Math.*, **87**, (1987), 385–402.

[4] W. J. Duke, J. Friedlander, H. Ivaniec, “Bounds for automorphic L-function”, *Invent. Math.*, **112**:1, (1993), 1–8.

[5] V. A. Bykovskii, “A trace formula for the scalar product of Hecke series and its applications”, *J. Math. Sci.*, **89**:1, (1998), 915–932.

[6] B. Conrey, H. Ivaniec, “The cubic moment of central values of automorphic L-functions”, *Ann. of Math. Second Series*, **151**:3, (2000), 1175–1216.

[7] В. А. Быковский, *Некоторые формулы суммирования арифметического типа и их приложения*, Препринт, Вычислительный центр ДВНЦ АН СССР, Владивосток, 1986, 38 с.

Поступила в редакцию
26 октября 2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00225.)

Bykovskii V. A. On the distribution of integer points on a hyperboloid. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 2. P. 147–151.

ABSTRACT

A new method for studying integer points on hyperboloids (Linnik problem) is proposed. It is based on the spectral theory of automorphic functions. In doing so an asymptotic formula with a fundamentally new power saving error term is obtained.

Key words: *distribution of integer points on a hyperboloid, spectral theory of automorphic functions, L-series of automorphic forms, Shintani correspondence.*