Дальневосточный математический журнал. 2017. Т. 17. № 1. С. 22–29

УДК 539
MSC2010 60G15, 81S40

© М. А. Гузев[1]

Применение функционального подхода для вычисления плотности вероятности

Для линейной задачи стохастической динамики вычислена плотность вероятности случайного процесса. Показано, что полученный результат требует знания функции Грина соответствующей задачи. Рассмотрено приложение формул для анализа одномерного уравнения Ланжевена и движения частицы под действием случайной внешней силы при наличии линейного трения.

Ключевые слова: *стохастическая динамика, плотность вероятности, Гауссовы процессы, функциональные интегралы, уравнение Ланжевена.*

Введение

Хорошо известно [1], что для случайного векторного процесса $\boldsymbol{\varphi}(t)$ все статистические характеристики в фиксированный момент времени определяются знанием плотности вероятности $P(\boldsymbol{\varphi},t)=\langle\delta(\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\varphi})\rangle$, где скобки $\langle ...\rangle$ обозначают усреднение по ансамблю всех реализаций поля $\boldsymbol{\varphi}(t)$. В данной работе мы рассмотрим $\boldsymbol{\varphi}(t)$ как решение задачи стохастической динамики, формулируя ее следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}(t)}{dt}=K\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\eta}(t), \quad \langle\hat{\eta}_k(t_1)\hat{\eta}_m(t_2)\rangle = B_{km}(t_1,t_2), \tag{1}$$

где K — заданный t — локальный (т.е. зависящий от поля $\boldsymbol{\varphi}(t)$ в момент времени t) функционал, $\hat{\boldsymbol{\eta}}(t)$ — случайная внешняя сила, а $\boldsymbol{\eta}(t)$ в уравнении для $\boldsymbol{\varphi}(t)$ — любая конкретная реализация $\hat{\boldsymbol{\eta}}(t)$. Для $\hat{\boldsymbol{\eta}}(t)$ предполагается гауссово распределение с нулевым средним $\langle\hat{\boldsymbol{\eta}}\rangle=0$ и коррелятором $B_{km}(t_1,t_2)$.

Традиционная процедура исследования плотности вероятности включает запись уравнения Лиувилля [1] для индикаторной функции $\Phi(t,\boldsymbol{\varphi})=\delta(\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\varphi})$, его усреднение по ансамблю всех реализаций поля $\hat{\boldsymbol{\eta}}(t)$ и получение уравнения Фоккера–Планка для плотности вероятности. С другой стороны, при статистическом анализе стохастических уравнений для вычисления моментных функций [1, с.73] применяется

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7; Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: `guzev@iam.dvo.ru`

метод функционального описания. Этот подход широко используется в квантовой теории поля, и на его основе был получен следующий результат [2]: любая стохастическая задача (1) полностью эквивалентна квантовополевой модели с удвоенным числом полей и некоторым функционалом. Эквивалентность означает, что моментные функции случайного процесса $\boldsymbol{\varphi}(t)$ совпадают с обычными функциями Грина построенной квантовополевой модели [2, с.553]. Обзор функциональных методов для анализа стохастических уравнений представлен в статье [3] (см. также в ней ссылки на книги по применению функциональных интегралов в теории поля и статистической физике). Следует указать, что для исследования стохастических уравнений могут использоваться также другие подходы [4, 5].

Целью данной работы является вычисление плотности вероятности $P(\boldsymbol{\varphi},t)$ для случая, когда K является матрицей, т.е. система уравнений (1) является линейной неоднородной. Хотя такую модель можно рассматривать как классическую, вычисления функции $P(\boldsymbol{\varphi},t)$ не представлены в научной литературе.

1. Общая идея применения функционального подхода

Поясним общую идею вычисления плотности вероятности на примере одномерного процесса, который является решением стохастического уравнения

$$\frac{dz(t)}{dt} = \eta(t),\, z(t_0) = 0, \tag{2}$$

где $\eta(t)$ — гауссов процесс со средним $\langle\eta(t)\rangle=0$ и корреляционной функцией $B(t_1,t_2)= = \langle\eta(t_1)\eta(t_2)\rangle$. Решение уравнения (2) дается интегралом

$$z(t) = \int\limits_{t_0}^{t} ds\eta(s) \equiv \overline{\eta}. \tag{3}$$

Используя представление для дельта-функции

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R} dk \exp(itk), \tag{4}$$

получаем следующую формулу для вычисления плотности вероятности:

$$\langle\delta(z(t)-z)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R} dk \exp[izk] \left\langle \exp[i(z(t)k]\right\rangle. \tag{5}$$

Поскольку объект $\langle\exp[iz(t)k]\rangle$ является характеристическим функционалом случайного процесса $\eta(t)$ [1, с.78], то плотность вероятности является преобразованием Фурье от этого функционала. Последний, как показано в [1, с.78], равен

$$\langle\exp[iz(t)k]\rangle = \exp\left[-\frac{k^2}{2}\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int\limits_{t_0}^{t} dt_2 B(t_1,t_2)\right] = \exp\left[-\frac{k^2}{2}(\Gamma(t))^{-1}\right],$$

$$(\Gamma(t))^{-1} = \int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int\limits_{t_0}^{t} dt_2 B(t_1, t_2).$$

Подставляя (5) в (4) и вычисляя гауссов интеграл по k, получаем плотность вероятности

$$P(z,t) = \sqrt{\frac{\Gamma(t)}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Gamma(t)z^2}{2}\right). \tag{6}$$

Покажем, как, применяя квантовополевой подход при статистическом анализе задачи (1), получить формулу (6). В рамках формализма теории поля [2] плотность вероятности вычисляется как функциональное усреднение $\delta(z(t)-z)$ по конфигурациям $\eta(t)$ с весом $\exp(-\eta B^{-1}\eta/2)$:

$$\langle\delta(z(t)-z)\rangle = I^{-1} \int D\eta\delta(z(t)-z)\exp(-\eta B^{-1}\eta/2), I = \int D\eta \exp(-\eta B^{-1}\eta/2), \tag{7}$$

где квадратичная форма понимается как

$$\eta B^{-1}\eta = \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} ds_1 ds_2 \eta(s_1)\left[B(s_1,s_2)\right]^{-1}\eta(s_2).$$

Применяя (3), перепишем (7) в следующем виде:

$$\langle\delta(z(t)-z)\rangle = I^{-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{R} dk \exp(izk) \int D\eta \exp(-\eta B^{-1}\eta/2 + ik\overline{\eta}). \tag{8}$$

Функциональный интеграл по $\eta(t)$ является гауссовым и вычисляется в соответствии с известными формулами [6, § 6], в результате (8) редуцируется к соотношению

$$\langle\delta(z(t)-z)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R} dk \exp(izk)\exp\left(-k^2(\Gamma(t))^{-1}/2 + izk\right). \tag{9}$$

Вычисляя числовой гауссов интеграл (9), получаем (6).

Соотношение (6) допускает обобщение при рассмотрении многомерного случайного процесса $\mathbf{z}(t) = (z_1(t),...,z_N(t))$, который является решением стохастического уравнения

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{z}(t_0) = 0,$$

где $\boldsymbol{\eta}(t) = (\eta_1(t),...,\eta_N(t))$ — гауссов процесс со средним, равным нулю, и корреляционной функцией $B_{kj}(t_1,t_2) = \langle\eta_k(t_1)\eta_j(t_2)\rangle$. Технически удобно применить квантовополевой подход [2]. Сначала используя (4), запишем следующее представление для плотности вероятности:

$$\langle\delta(\mathbf{z}(t)-\mathbf{z})\rangle = \langle\delta(z_1(t)-z_1)...\delta(z_N(t)-z_N\rangle = \frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^N} d\boldsymbol{k}\exp(-i\boldsymbol{k}\mathbf{z})\left\langle\exp[i(\mathbf{z}(t)\boldsymbol{k}]\right\rangle.$$

Функциональное усреднение по $\boldsymbol{\eta}(t)$ дается соотношением

$$\langle\exp[i\mathbf{z}(t)\boldsymbol{k}]\rangle = J^{-1}\int D\boldsymbol{\eta}\exp[-\boldsymbol{\eta}B^{-1}\boldsymbol{\eta}/2+i\boldsymbol{k}\bar{\boldsymbol{\eta}}],$$

в котором

$$\boldsymbol{\eta}B^{-1}\boldsymbol{\eta} = \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} ds_1 ds_2 \eta_i(s_1)([B(s_1,s_2)])^{-1}_{ij}\eta_j(s_2), \mathbf{z}(t)\equiv\bar{\boldsymbol{\eta}} = \int\limits_{t_0}^{t} ds\boldsymbol{\eta}(s), \tag{10}$$

$$J = \int D\eta\exp[-\boldsymbol{\eta}B^{-1}\boldsymbol{\eta}/2],$$

а по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование . Применяя формулы [6, § 6], вычисляем гауссов функциональный интеграл по $\boldsymbol{\eta}(t)$:

$$\langle\delta(\mathbf{z}(t)-\mathbf{z})\rangle = \frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^N} d\boldsymbol{k}\exp[-\boldsymbol{k}\bar{B}\boldsymbol{k}/2-i\boldsymbol{k}\mathbf{z}], \boldsymbol{k}\bar{B}\boldsymbol{k}\equiv k_i\bar{B}_{ij}k_j, \tag{11}$$

$$\bar{B}_{ij} = \int\limits_{t_0}^{t} dt_1\int\limits_{t_0}^{t} dt_2 B_{ij}(t_1,t_2).$$

Соотношение (11) определяет многомерный гауссов интеграл, стандартная калькуляция которого приводит к следующему результату:

$$\langle\delta(\mathbf{z}(t)-\mathbf{z})\rangle = \det[2\pi\bar{B}]^{-1/2}\exp[-\mathbf{z}(\bar{B})^{-1}\mathbf{z}/2],\ \mathbf{z}(\bar{B})^{-1}\mathbf{z}\equiv z_i((\bar{B})^{-1})_{ij}z_j. \tag{12}$$

2. Функциональное интегрирование для задачи (1)

В случае постоянной матрицы K решение $\boldsymbol{\varphi}(t)$ уравнения (1) является линейным функционалом от $\boldsymbol{\eta}(t)$, определяемым при условии $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=0$ соотношением

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} ds\ e^{(t-s)K}\boldsymbol{\eta}(s)\equiv\int\limits_{t_0}^{t} dsG(t,s)\boldsymbol{\eta}(s)\Leftrightarrow\varphi_i(t) = \int\limits_{t_0}^{t} dsG_{ij}(t,s)\eta_j(s), \tag{13}$$

в котором $G_{ij}(t_1,t_2)$ – функция Грина системы (1). Сравнение (13) с (10) позволяет сделать вывод, что решение для $\mathbf{z}(t)$ переходит в $\boldsymbol{\varphi}(t)$ при формальной замене $\eta_j(s)\to G_{ij}(t,s)\eta_j(s)$. Процесс $G_{ij}(t,s)\eta_j(s)$ является гауссовым со средним, равным нулю, и корреляционной функцией

$$D_{kj}(s_1,s_2) = \langle G_{km}(t,s_1)\eta_m(s_1)G_{jl}(t,s_2)\eta_l(s_2)\rangle = G_{km}(t,s_1)G_{jl}(t,s_2)B_{ml}(s_1,s_2),$$

в которой время t рассматривается как параметр. Таким образом, формулу для одновременной плотности вероятности $\langle\delta(\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\varphi})\rangle$ можно получить из (12), полагая

$$\boldsymbol{\varphi}\to\mathbf{z},\ (\bar{B})^{-1}\to(\bar{D})^{-1}, (\bar{D})_{ij} = \int\limits_{t_0}^{t} ds_1\int\limits_{t_0}^{t} ds_2 G_{im}(t,s_1)B_{ml}(s_1,s_2)G_{jl}(t,s_2), \tag{14}$$

$$\langle\delta(\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\varphi})\rangle = \det[2\pi\bar{D}]^{-1/2}\exp[-\boldsymbol{\varphi}(\bar{D})^{-1}\boldsymbol{\varphi}/2],\ \boldsymbol{\varphi}(\bar{D})^{-1}\boldsymbol{\varphi}\equiv\varphi_i((\bar{D})^{-1})_{ij}\varphi_j. \tag{15}$$

Формула (15) позволяет записать представление для одновременных моментных функций $\langle\varphi_1^{n_1}(t),...,\varphi_N^{n_N}(t)\rangle$ в виде

$$\langle\varphi_1^{n_1}(t),...,\varphi_N^{n_N}(t)\rangle = \int\limits_{R^N} \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\varphi_1^{n_1}...\varphi_N^{n_N}\,\langle\delta(\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\varphi})\rangle =$$

$$= \frac{\partial^{n_1}}{\partial a_1^{n_1}}...\frac{\partial^{n_N}}{\partial a_N^{n_N}} \int\limits_{R^N} \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\,\langle\delta(\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\varphi})\rangle\exp[-\boldsymbol{\varphi}\mathrm{a}]\Bigg|_{\mathrm{a}=0},$$

где $\mathrm{a}=(a_1,...,a_N)$. Подставляя сюда (15), получаем гауссов интеграл, вычисление которого дает

$$\langle\varphi_1^{n_1}(t),...,\varphi_N^{n_N}(t)\rangle = \frac{\partial^{n_1}}{\partial a_1^{n_1}}...\frac{\partial^{n_N}}{\partial a_N^{n_N}}\exp[-\mathrm{a}\bar{D}\mathrm{a}/2]\big|_{\mathrm{a}=0}. \tag{16}$$

3. Некоторые примеры

Проиллюстрируем частные случаи применения формул (14)–(16).

1. Рассмотрим одномерное уравнение Ланжевена [1]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda x(t)+\eta(t), \quad x(t_0)=0, \quad \langle\eta(t_1)\eta(t_2)\rangle = B(t_1-t_2).$$

Введем плотность вероятности $P(x,t)=\langle\delta(x(t)-x)\rangle$. Решение $x(t)$ при задании конкретной реализации случайной силы $\eta(t)$ определяется формулой (13):

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} dsG(t-s)\eta(s), \quad G(t-s) = \exp[-\lambda(t-\tau)].$$

Вычисляя корреляционную функцию (14), получаем

$$\bar{D}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} ds_1 \int\limits_{t_0}^{t} ds_2 G(t-s_1)B(s_1-s_2)G(t-s_2) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int\limits_{0}^{t-t_0} ds\exp(-\lambda s)B(s) - \frac{\exp(-2\lambda(t-t_0))}{\lambda}\int\limits_{0}^{t-t_0} dsB(s)\exp(\lambda s).$$

Отсюда и из (15) следует, что плотность вероятности равна

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{D}(t)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\bar{D}(t)}\right). \tag{17}$$

Используя (16), вычисляем второй момент $\langle x^2(t)\rangle=\bar{D}(t)$. При $t_0\to-\infty$ параметр $\bar{D}(t)$ переходит в

$$\bar{D}(\infty) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{0}^{\infty} ds\exp(-\lambda s)B(s) = \frac{\hat{B}(\lambda)}{\lambda},$$

где $\hat{B}(\lambda)$ является преобразованием Лапласа корреляционной функции $B(t)$, и распределение (17) становится стационарным.

2. Другим примером является движение частицы под действием случайной внешней силы при наличии линейного трения [1]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t), \quad \frac{dv(t)}{dt} = -\lambda v(t) + \eta(t), \quad x(t_0) = 0, \quad v(t_0) = 0. \tag{18}$$

Для системы (18) в терминах обозначений (1) справедливы соотношения

$$\varphi_1(t) = x(t), \quad \varphi_2(t) = v(t), \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_1(t) = 0, \eta_2(t) = \eta(t).$$

Компоненты корреляционной матрицы равны

$$B_{11}(t_1,t_2) = B_{12}(t_1,t_2) = B_{12}(t_1,t_2) = 0, \quad B_{22}(t_1,t_2) = \langle \eta(t_1)\eta(t_2)\rangle = B(t_1 - t_2). \tag{19}$$

Решение стохастических уравнений (18) дается формулами:

$$x(t) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{t_0}^{t} ds\eta(s)[1 - \exp(-\lambda(t-s))], \quad v(t) = \int\limits_{t_0}^{t} ds\eta(s)\exp[-\lambda(t-s)]).$$

Отсюда и из (13) следует, что

$$G_{12}(t,s) = \frac{1}{\lambda}[1 - \exp(-\lambda(t-s))], \quad G_{22}(t,s) = \exp(-\lambda(t-s)). \tag{20}$$

Используя соотношения (19), легко вычислить элементы матрицы (14) для совместной плотности вероятностей $P(x,v,t) = \langle \delta(x(t)-x))\delta(v(t)-v))\rangle$ (15) положения частицы $x(t)$ и ее скорости $v(t)$:

$$(\bar{D})_{11} = \int\limits_{t_0}^{t} ds_1 \int\limits_{t_0}^{t} ds_2 G_{11}(t,s_1)B(s_1 - s_2)G_{11}(t,s_2),$$

$$(\bar{D})_{22} = \int\limits_{t_0}^{t} ds_1 \int\limits_{t_0}^{t} ds_2 G_{22}(t,s_1)B(s_1 - s_2)G_{22}(t,s_2),$$

$$(\bar{D})_{12} = (\bar{D})_{21} = \int\limits_{t_0}^{t} ds_1 \int\limits_{t_0}^{t} ds_2 G_{12}(t,s_1)B(s_1 - s_2)G_{12}(t,s_2).$$

Интегралы по области можно записать через интегралы I_0, I_1, I_2 :

$$I_0 = \int\limits_{t_0}^{t} ds_1 \int\limits_{t_0}^{t} ds_2 B(s_1 - s_2) = 2 \int\limits_{t_0}^{t} ds_1 \int\limits_{t_0}^{s_1} ds_2 B(s_1 - s_2),$$

$$I_1 = \int\limits_{t_0}^{t} ds_2 \exp[-\lambda(t - s_2)] \int\limits_{t_0}^{t} ds_1 B(s_1 - s_2) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} ds_2 \left[B(t - s_1) - e^{-\lambda(t-t_0)} B(s_1 - t_0)\right] + \int\limits_{t_0}^{t} ds_1 e^{-\lambda(t-s_1)} \left[B(t - s_1) - B(s_1 - t_0)\right],$$

$$I_2 = \int\limits_{t_0}^{t} ds_1 \int\limits_{t_0}^{t} ds_2 \exp[-\lambda(t - s_1)] \exp[-\lambda(t - s_2)] B(s_1 - s_2) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int\limits_{0}^{t-t_0} ds \exp(-\lambda s) B(s) - \frac{\exp(-2\lambda(t - t_0))}{\lambda} \int\limits_{0}^{t-t_0} ds \exp(\lambda s) B(s).$$

Тогда

$$(\bar{D})_{11} = \frac{1}{\lambda^2}(I_0 - 2I_1 + I_2), \quad (\bar{D})_{22} = I_2, \quad (\bar{D})_{12} = \frac{1}{\lambda}(I_1 - I_2).$$

Используя (16), вычисляем второй момент скорости $\left\langle v^2(t) \right\rangle$, имеющий смысл средней кинетической энергии частицы: $\left\langle v^2(t) \right\rangle = (\bar{D})_{22} = I_2$.

Автор благодарит И.О. Ярощука за обсуждение вопросов, затронутых в работе.

Список литературы

[1] В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения глазами физика (Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения)*, Физматлит, М., 2001.

[2] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, ПИЯФ, СПб, 1998.

[3] Carson. C. Chow, Michael A. Buice, “Path Integral Methods for Stochastic Differential”, *Equations Journal of Mathematical Neuroscience*, **5**:8, (2015), 1–35.

[4] C. W. Gardiner, *Stochastic methods: A Handbook for the Natural and Social sciences (Springer Series in Synergetics)*, Springer, Berlin, 2009.

[5] N. G. Van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry*, 3rd ed., Elsevier, Amsterdam, 2007.

[6] А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и квантовой статистике*, Издательство Ленингр. ун-та, Ленинград, 1976.

Поступила в редакцию
14 апреля 2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке программы Дальний Восток (проект No 15-I-4-041).

Guzev M. A. Application of the path integral for calculation of simultaneous probability density. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 1. P. 22–29.

ABSTRACT

Probability density of a random process was calculated for the linear problem of stochastic dynamics. The result obtained was shown to require the definition of the Green's function of the corresponding problem. The formulas were applied for analysis of one-dimensional Langevin equations and of the particle motion under the influence of random external forces in the presence of linear friction.

Key words: *stochastic dynamics, probability density, Gaussian processes, path integrals, Langevin equation.*