Дальневосточный математический журнал. 2016. Том 16. № 2. С. 169–180

УДК 517.965, 517.583
MSC2010 39B32, 33E05

© А. А. Илларионов[1]

Решение функционального уравнения, связанного с трилинейными дифференциальными операторами

Мы решаем функциональное уравнение

$$f(x+z)f(y+z)f(x+y-z) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x,y)\psi_j(z) \qquad (x,y,z \in \mathbb{C})$$

относительно неизвестных функций $f, \psi_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\phi_j : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ в случае, когда $m \leq 5$.

Ключевые слова: *функциональное уравнение, сигма-функция Вейерштрасса, эллиптическая функция, теоремы сложения, трилинейные уравнения*

Введение

При исследовании трилинейных дифференциальных уравнений возникает следующее функциональное уравнение (см. [1])

$$f_1(x+z)f_2(y+z)f_3(x+y-z) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x,y)\psi_j(z) \tag{1}$$

относительно неизвестных функций $f_1, f_2, f_3, \psi_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\phi_j : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$. Оно решено только при $m \leq 3$ (см. [2]). В настоящей работе рассматривается частный случай (1), когда $f_1 = f_2 = f_3 = f$, т.е.

$$f(x+z)f(y+z)f(x+y-z) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x,y)\psi_j(z) \tag{2}$$

и находятся все его решения при $m \leq 5$.

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54; Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136. Электронная почта: `illar_a@list.ru`

Определение. Целую (голоморфную на всем $\mathbb{C}$), не равную тождественно нулю функцию $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ будем называть *решением уравнения (2)*, если

1) существуют функции $\phi_j : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\psi_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющие (2) для всех $x, y, z \in \mathbb{C}$;

2) не существует функций $\tilde{\phi}_j : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\tilde{\psi}_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\forall x, y, z \in \mathbb{C} \quad f(x+z)f(y+z)f(x+y-z) = \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{\phi}_j(x,y)\tilde{\psi}_j(z). \qquad (3)$$

Определение. Будем говорить, что функции $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *эквивалентны* и писать $f \sim g$, если существуют такие $A, B, C, z_0 \in \mathbb{C}$, что для любого $z \in \mathbb{C}$

$$g(z) = f(z+z_0) \cdot e^{Az^2+Bz+C}.$$

Нетрудно проверить, что эквивалентные функции могут быть решениями (2) только одновременно. Поэтому будем описывать решения (2) с точностью до отношения эквивалентности. Основной результат настоящей статьи заключается в следующем.

Теорема 1. *Пусть f — решение (2) при некотором $m \leq 5$. Тогда*

$$f \sim 1 \text{ или } f \sim \sigma_L,$$

где 1 — функция тождественно равная единице, а σ_L — сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с решеткой L.

Определение сигма-функции Вейерштрасса приводится в § 2.

Замечание 1. Функция $f \equiv 1$ удовлетворяет (2) при $m = 1$ ($\phi_1 \equiv 1$, $\psi_1 \equiv 1$). Функция $f = \sigma_L$ является решением (2) при $m = 3$ (см. формулу (4) ниже). Поэтому уравнение (2) не имеет решений при $m = 2, 4, 5$.

Замечание 2. Можно доказать, что функция $f = \sigma_L^k$ ($k \in \mathbb{N}$) является решением уравнения (2) при $m = 3k$. Разумеется, при $m > 6$ есть и другие решения. Однако автору неизвестны решения (2) для целого $m > 1$, которое не делится на 3.

1. Частные решения уравнения (2) при $m = 3, 6$

Лемма 1. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ целая функция. Предположим, что существуют такие $\phi_j : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\psi_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($j = \overline{1,m}$), что выполняется (2). Тогда f есть решение (2), если и только если системы $\{\phi_j\}_{j=1}^m$, $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ линейно независимы (над полем $\mathbb{C}$).*

Доказательство. Пусть, например, система $\{\phi_j\}_{j=1}^m$ линейно зависима. Тогда одна из функций системы, пусть это будет ϕ_m, есть линейная комбинация оставшихся. Поэтому для некоторых $\tilde{\psi}_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\sum_{j=1}^{m} \phi_j(x,y)\psi_j(z) = \sum_{j=1}^{m-1} \phi_j(x,y)\tilde{\psi}_j(z).$$

Значит, выполняется (3). Следовательно, f не является решением (2) при данном m.

Пусть системы $\{\phi_j\}_{j=1}^m$, $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ линейно независимы. Если f не является решением (2), то найдутся $\tilde{\phi}_j : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\tilde{\psi}_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющие (3). Поэтому

$$\sum_{j=1}^{m} \phi_j(x,y)\psi_j(z) = \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{\phi}_j(x,y)\tilde{\psi}_j(z).$$

Нетрудно проверить, что последнее соотношение противоречит линейной независимости систем $\{\phi_j\}_{j=1}^m$, $\{\psi_j\}_{j=1}^m$. $\square$

Под решеткой L будем понимать дискретную аддитивную подгруппу поля $\mathbb{C}$, т.е. множество одного из следующих видов

$$L = \{0\}, \quad L = \{m\omega : m \in \mathbb{Z}\}, \quad L = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\},$$

где $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а ω_1, ω_2 — линейно независимые над $\mathbb{R}$ комплексные числа.

Сигма-функция Вейрштрасса $\sigma_L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ассоциированная с решеткой L, определяется формулой

$$\sigma_L(z) = z \cdot \prod_{l \in L \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{l} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{l}\right)^2\right).$$

Если $L = \{0\}$, то $\sigma_L(z) = z$. Если $L = \{m\omega : m \in \mathbb{Z}\}$, то

$$\sigma_L(z) = \frac{\omega}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{\omega}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{6}\left(\frac{\pi z}{\omega}\right)^2\right).$$

Функция σ_L нечетная и целая. Все ее нули простые и расположены в точках решетки L.

Из классической формулы [3, глава 20]

$$\sigma_L(x+y+z)\sigma_L(x-y)\sigma_L(y-z)\sigma_L(z-x) = \\ = \frac{\sigma_L^3(x)\sigma_L^3(y)\sigma_L^3(z)}{2} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & \wp_L(x) & \wp_L'(x) \\ 1 & \wp_L(y) & \wp_L'(y) \\ 1 & \wp_L(z) & \wp_L'(z) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\wp_L = -(\log \sigma_L)''$ ($\wp$-функция Вейерштрасса, эллиптическая функция Вейерштрасса) вытекает, что $f = \sigma_L$ есть решение (2) при $m = 3$.

Возьмем любую решетку L, число $z_0 \in \mathbb{C}$, и определим четную функцию

$$F_{L,z_0}(z) = \sigma_L(z + z_0/2)\sigma_L(z - z_0/2). \quad (5)$$

Отметим, что если $z_0 \in (\frac{1}{2}L) \setminus L$, то $F_{L,z_0} \sim \sigma_\Lambda$, где $\Lambda = \frac{1}{2}L$.

Основной целью настоящего параграфа является доказательство того, что F_{L,z_0} есть решение (2) при $m = 6$, если $z_0 \notin (\frac{1}{2}L) \setminus L$. Из (4) вытекает, что $f = F_{L,z_0}$ удовлетворяет разложению (2) с шестью слагаемыми в правой части. Осталось доказать, что системы $\{\phi_j\}$ и $\{\psi_j\}$ линейно независимы. Для этого нам понадобится вспомогательная лемма.

Лемма 2. *Пусть L — решетка, $\sigma = \sigma_L$, $\wp = -(\log\sigma)''$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда следующие четыре функции (аргумента $z \in \mathbb{C}$)*

$$\wp'(z)\wp'(z + z_0), \quad \wp(z)\wp(z + z_0), \quad \wp(z) + \wp(z + z_0), \quad 1 \quad (6)$$

являются линейно зависимыми, если и только если $z_0 \in (\frac{1}{2}L) \setminus L$.

Доказательство. Ограничимся самым сложным случаем, когда

$$L = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\},$$

где ω_1, ω_2 — линейно независимые над $\mathbb{R}$ точки из $\mathbb{C}$.

Если $z_0 \in (\frac{1}{2}L) \setminus L$, то из известной формулы об изменении значения функции $\wp$ при добавлении к аргументу полупериода (см., например, [3, § 20.33]) вытекает, что вторая, третья и четвертая функция из (6) линейно зависимы. Осталось доказать, что функции (6) линейно независимы в противном случае. Далее всюду считаем, что $z_0 \notin (\frac{1}{2}L) \setminus L$, то есть либо $z_0 \in L$, либо $z_0 \notin \frac{1}{2}L$.

Пусть $z_0 \in L$. Если функции (6) линейно зависимы, то в силу z_0-периодичности $\wp$ линейно зависимыми будут ${\wp^2}', \wp^2, \wp, 1$. Но тогда из классического уравнения

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_1\wp - g_2,$$

вытекает линейная зависимость функций $\wp^3, \wp^2, \wp, 1$. Это невозможно.

Пусть $z_0 \notin \frac{1}{2}L$. Предположим, что $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$, причем

$$c_3\wp'(z)\wp'(z + z_0) + c_2\wp(z)\wp(z + z_0) + c_1(\wp(z) + \wp(z + z_0)) = c_0. \quad (7)$$

Напомним, что множество полюсов функции $\wp$ совпадает с L и все полюсы имеют порядок 2. Все полюсы $\wp'$ имеют порядок 3 и также находятся в точках L. Множество нулей $\wp'$ равно $\frac{1}{2}L$. Поэтому $\wp'(z_0) \neq 0$ и точка z_0 не является полюсом функции $\wp$ или $\wp'$. Кроме того, $\wp(z)/\wp'(z) \to 0$ при $z \to 0$. Поэтому, рассматривая (7) при $z \to 0$, приходим к выводу: $c_3 = 0$. Значит,

$$c_2\wp(z)\wp(z + z_0) + c_1(\wp(z) + \wp(z + z_0)) = c_0.$$

Рассматривая последнее соотношение при $z \to 0$, получаем

$$c_2\wp(z_0) + c_1 = 0.$$

Предположим, что $c_2 \neq 0$. Не умаляя общности считаем, что $c_2 = 1$. Тогда $\wp(z_0) = -c_1$, причем

$$\wp(z)\wp(z+z_0) + c_1(\wp(z) + \wp(z+z_0)) = c_0 \quad \Rightarrow \quad (\wp(z)+c_1)(\wp(z+z_0)+c_1) = c_0 + c_1^2.$$

Поскольку функция в левой части последнего равенства имеет нули, то $c_0 + c_1^2 = 0$, следовательно, $\wp \equiv -c_1$. Получили противоречие. Значит, $c_2 = 0$.

Так как $c_2 = 0$, то $c_1 = -c_2\wp(z_0) = 0$. Но тогда и $c_0 = 0$. Все постоянные c_i равны нулю. Значит, функции (6) линейно независимы. □

Замечание 3. Пусть $z_0 \notin (\frac{1}{2}L) \setminus L$. Тогда из леммы 2 вытекает, что функции

$$\wp'(z+z_0/2)\wp'(z-z_0/2), \quad \wp(z+z_0/2)\wp(z-z_0/2), \quad \wp(z+z_0/2)+\wp(z-z_0/2), \quad 1$$

линейно независимы.

Лемма 3. *Функция F_{L,z_0}, определяемая формулой (5), где $z_0 \notin (\frac{1}{2}L) \setminus L$, есть решение (2) при $m = 6$.*

Доказательство. Для краткости будем опускать индекс L у функций Вейерштрасса σ_L и $\wp_L$. Заменяя в (4) z на $-z$, учитывая четность функции $\wp$ и нечетность σ, получаем формулу

$$\sigma(x+z)\sigma(y+z)\sigma(x+y-z) = \frac{\sigma^3(x)\sigma^3(y)\sigma^3(z)}{2\sigma(x-y)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \wp(x) & \wp'(x) \\ 1 & \wp(y) & \wp'(y) \\ 1 & \wp(z) & -\wp'(z) \end{vmatrix},$$

согласно которой

$$\begin{aligned} F_{L,z_0}(x+y)F_{L,z_0}(y+z)F_{L,z_0}(x+y-z) = \\ = \sigma(x+(z+z_0/2))\sigma(y+(z+z_0/2))\sigma(x+y-(z+z_0/2)) \times \\ \times \sigma(x+(z-z_0/2))\sigma(y+(z-z_0/2))\sigma(x+y-(z-z_0/2)) = \\ = \frac{\sigma^6(x)\sigma^6(y)}{4\sigma^2(x-y)}\sigma^3(z+z_0/2)\sigma^3(z-z_0/2) \times \\ \times \begin{vmatrix} 1 & \wp(x) & \wp'(x) \\ 1 & \wp(y) & \wp'(y) \\ 1 & \wp(z+z_0/2) & -\wp'(z+z_0/2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \wp(x) & \wp'(x) \\ 1 & \wp(y) & \wp'(y) \\ 1 & \wp(z-z_0/2) & -\wp'(z-z_0/2) \end{vmatrix} = \\ = S_1(x,y)S_2(z)\sum_{j=1}^{6} \phi_j(x,y)\psi_j(z), \end{aligned}$$

где

$$S_1(x,y)=\frac{\sigma^6(x)\sigma^6(y)}{4\sigma^2(x-y)},\qquad S_2(z)=\sigma^3(z+z_0/2)\sigma^3(z-z_0/2),$$

$$\phi_1(x,y)=\begin{vmatrix}\wp(x) & \wp'(x)\\ \wp(y) & \wp'(y)\end{vmatrix}^2,\qquad \psi_1(z)=1,$$

$$\phi_2(x,y)=\begin{vmatrix}1 & \wp'(x)\\ 1 & \wp'(y)\end{vmatrix}^2,\qquad \psi_2(z)=\wp(z+z_0/2)\wp(z-z_0/2),$$

$$\phi_3(x,y)=\begin{vmatrix}1 & \wp(x)\\ 1 & \wp(y)\end{vmatrix}^2,\qquad \psi_3(z)=\wp'(z+z_0/2)\wp'(z-z_0/2),$$

$$\phi_4(x,y)=\begin{vmatrix}\wp(x) & \wp'(x)\\ \wp(y) & \wp'(y)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & \wp'(x)\\ 1 & \wp'(y)\end{vmatrix},\qquad \psi_4(z)=-\wp(z+z_0/2)-\wp(z-z_0/2),$$

$$\phi_5(x,y)=\begin{vmatrix}\wp(x) & \wp'(x)\\ \wp(y) & \wp'(y)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & \wp(x)\\ 1 & \wp(y)\end{vmatrix},\qquad \psi_5(z)=\psi_4'(z),$$

$$\phi_6(x,y)=\begin{vmatrix}1 & \wp'(x)\\ 1 & \wp'(y)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & \wp(x)\\ 1 & \wp(y)\end{vmatrix},\qquad \psi_6(z)=-\psi_2'(z).$$

Согласно лемме 1 осталось доказать, что системы $\{\psi_j\}_{j=1}^6$, $\{\phi_j\}_{j=1}^6$ линейно независимы.

Докажем, что функции $\phi_1,\dots,\phi_6$ линейно независимы. Пусть $c_1,\dots,c_6\in\mathbb{C}$, причем

$$\sum_{j=1}^6 c_j\phi(x,y)=0.$$

Полагая $y=-x$ и учитывая, что $\wp$ — четная, а $\wp'$ — нечетная функции, получаем

$$c_1\begin{vmatrix}\wp(x) & \wp'(x)\\ \wp(x) & -\wp'(x)\end{vmatrix}^2+c_2\begin{vmatrix}1 & \wp'(x)\\ 1 & -\wp'(x)\end{vmatrix}^2+c_4\begin{vmatrix}\wp(x) & \wp'(x)\\ \wp(x) & -\wp'(x)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & \wp'(x)\\ 1 & -\wp'(x)\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно,

$$c_1(2\wp\wp')^2+c_2(2\wp')^2+c_4(-2\wp\wp')(-2\wp')=0\quad\Longrightarrow\quad c_1\wp^2+c_2+c_4\wp=0.$$

Поэтому $c_1=c_2=c_4=0$. Значит, $c_3\phi_3(x,y)+c_5\phi_5(x,y)+c_6\phi_6(x,y)=0$, т.е.

$$c_3(\wp(y)-\wp(x))^2+c_5(\wp'(y)\wp(x)-\wp(y)\wp'(x))(\wp(y)-\wp(x))+\\ +c_6(\wp'(y)-\wp'(x))(\wp(y)-\wp(x))=0.$$

Сокращая последнее равенство на $(\wp(y)-\wp(x))$ и полагая $y=-x$, имеем

$$c_5(-2\wp'\wp)+c_6(-2\wp')=0\quad\Longrightarrow\quad c_5\wp+c_6=0.$$

Значит, $c_5=c_6=0$. Но тогда и $c_3=0$. Все c_j равны нулю. Следовательно, $\phi_1,\dots,\phi_6$ линейно независимы.

Осталось доказать, что функции $\{\psi_j\}_{j=1}^6$ линейно независимы. Согласно замечанию 3 функции $\{\psi_j\}_{j=1}^4$ линейно независимы. Так как $\psi_5=\psi_4'$, $\psi_6=-\psi_2'$, то из линейной независимости $\{1,\psi_4,\psi_2\}$ следует линейная независимость функций ψ_5,ψ_6. Поскольку $\wp$ — четная, то $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$ — четные, а ψ_5,ψ_6 — нечетные. Поэтому $\{\psi_j\}_{j=1}^6$ линейно независимы. □

2. Некоторые сведения из теории целых функций

Напомним, что порядок $\rho(f)$ целой функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ определяется формулой

$$\rho(f) = \limsup_{R\to\infty} \frac{\log\log M_f(R)}{\log R},$$

где

$$M_f(R) = \sup\{|f(z)| : |z| = R\}.$$

Порядок сигма-функции Вейерштрасса σ_L равен нулю, если $L = \{0\}$ (т.е. $\sigma_L(z) = z$), и двум — во всех остальных случаях.

Будем говорить, что функции f_1 и f_2 имеют одинаковые множества нулей, если условие «a — нуль функции f_1 кратности k» эквивалентно тому, что a — нуль функции f_2 кратности k.

Теорема 2. *Пусть $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — целые функции конечных порядков. Если f_1 и f_2 имеют одинаковые множества нулей, то $f_1 = e^P \cdot f_2$, где P — многочлен степени не большей, чем* $\max\{\rho(f_1), \rho(f_2)\}$.

Теорема вытекает из классического результата о представлении целых функций конечного порядка в виде произведения Вейерштрасса (см., например, [4, стр. 252, формула (35)]).

Лемма 4. *Пусть f — целая функция, причем $f \not\equiv 0$, $\rho(f) < 3$. Предположим, что для любого нуля z_0 функции f найдется постоянная $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такая, что*

$$\forall x, y \in \mathbb{C} \qquad f(x+z_0)f(y+z_0)f(x+y-z_0) = C \cdot f(x)f(y)f(x+y). \tag{8}$$

Тогда существует такая решетка L, что $f \sim \sigma_L^k$, где k — кратность нуля $z = 0$ функции f (если $f(0) \neq 0$, то $k = 0$).

Доказательство. Если f не имеет нулей, то согласно обобщенной теореме Лиувилля $f = e^P$, где P — квадратный многочлен. Следовательно, $f \sim 1 = \sigma_L^0$.

Пусть f имеет нули. Обозначим множество нулей f через L. Возьмем любые $z_0, z_1 \in L$. Выбирая в (8) $x = 0$ и $x = z_1 - z_0$, получаем включения

$$0 \in L, \quad (z_1 - z_0) \in L.$$

Значит, L — аддитивная подгруппа поля $\mathbb{C}$. Множество нулей целой функции, не равной тождественно нулю, есть дискретное множество. Поэтому L — решетка. Рассматривая (8) при $x \to 0$, приходим к выводу, что кратность любого нуля $z = z_0$ функции f равна кратности нуля $z = 0$. Поэтому все нули f имеют кратность k. Значит, функции f и σ_L^k имеют одинаковые множества нулей. Поскольку порядки этих функций меньше, чем 3, то по теореме 2

$$f = \sigma_L \cdot e^P,$$

где P — квадратный многочлен. Поэтому $f \sim \sigma_L^k$. □

3. Вспомогательное функциональное уравнение

Как отмечено в [2], изучение (1) можно свести к исследованию функционального уравнения

$$f(x+y)g(x-y)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x)\beta_j(y),\quad x,y\in\mathbb{C},\tag{9}$$

которое представляет и самостоятельный интерес. Оно рассматривалось в [2, 5–9]. Однако полное решение (9) известно только при $n=1,2$.

Рассмотрим частный случай (9), когда $g=f$:

$$f(x+y)f(x-y)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x)\beta_j(y),\quad x,y\in\mathbb{C}.\tag{10}$$

Как и в [2, 7] будем использовать следующее обозначение.

Определение. Запись $R(f)=n$ означает, что f — целая, не равная тождественно нулю, функция, которая удовлетворяет разложению (10) с некоторыми $\alpha_j,\beta_j:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ и минимально возможным n.

Замечание 4. Условие «n — минимально возможное» равносильно линейной независимости систем $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$, $\{\beta_j\}_{j=1}^n$ (см., например, [2]).

Для любой сигма-функции σ_L выполняется равенство (формула сложения):

$$\forall x,y\in\mathbb{C}\qquad \sigma_L(x+y)\sigma_L(x-y)=\sigma_L^2(x)\sigma_L^2(y)\left(\wp_L(y)-\wp_L(x)\right),\tag{11}$$

согласно которому $R(\sigma_L)=2$. Используя (11) нетрудно также проверить, что

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad R(\sigma_L^k)=k+1.$$

Известно (см. [2,7]), что $\rho(f)\le 2$ при $R(f)<\infty$ (порядок решения f уравнения (10) не больше двух).

Уравнение (10) решено при $n\le 3$. А именно, справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Все решения (10) при $n\le 3$ имеют следующий вид:*

если $R(f)=1$, то $f\sim 1$;

если $R(f)=2$, то существует такая решетка L, что $f\sim\sigma_L$;

если $R(f)=3$, то существует такая решетка L и точка $z_0\notin(\frac{1}{2}L)\setminus L$, что $f\sim F_{L,z_0}$, где F_{L,z_0} определяется (5).

Случай $R(f)=1$ тривиальный. Случай $R(f)=2$ впервые исследован в [5] (более простые доказательства можно найти в [2, 7, 9]). Утверждение теоремы при $R(f)=3$ получено в работе автора [9].

4. Свойства решений уравнения (2) и доказательство теоремы 1

Пусть f — решение (2). Выбирая в (2) $y = 0$, получаем

$$f(x+z)f(x-z)f(z) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x,0)\psi_j(z). \tag{12}$$

Значит, $R(f) \le m$. Более того,

$$R(f) \le \operatorname{rank}\{\phi_j(x,0)\}_{j=1}^{m}, \tag{13}$$

где $\operatorname{rank}\{\phi_j(x,0)\}_{j=1}^{m}$ — максимальное число линейно независимых над $\mathbb{C}$ функций (аргумента $x \in \mathbb{C}$) системы $\{\phi_j(x,0)\}_{j=1}^{m}$.

Кроме того, т.к. $R(f) < \infty$, то порядок f не больше, чем 2.

Лемма 5. *Пусть f — решение (2). Если f не имеет нулей, то $m = 1$, $f \sim 1$.*

Доказательство. Так как f не имеет нулей, а порядок f не превосходит 2, то по обобщенной теореме Лиувилля $f = e^P$, где P — квадратный многочлен. Значит, $f \sim 1$. Поэтому $m = 1$. □

Из работы [2] вытекает, что $R(f) \le m - 1$ при $m > 1$. В следующей лемме мы уточняем этот результат.

Лемма 6. *Пусть $m > 1$, f — решение (2). Тогда $R(f) \le m - 1$, причем, если $R(f) = m - 1$, то $f \sim \sigma_L^k$, где L — некоторая решетка, а $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Согласно лемме 5 функция f имеет нули. Не умаляя общности, будем считать, что $f(0) = 0$. Нетрудно заметить, что

$$\forall z_0 \in \mathbb{C} \qquad (\psi_1(z_0), \ldots, \psi_m(z_0)) \ne 0,$$

т.к. в противном случае, полагая в (2) $z = z_0$, приходим к выводу $f \equiv 0$.

Выбирая в (12) $z = 0$, получаем

$$\sum_{j=1}^{m} \phi_j(x,0)\psi_j(0) = 0. \tag{14}$$

Поскольку $(\psi_1(0), \ldots, \psi_m(0)) \ne 0$, то $\operatorname{rank}\{\phi_j(x,0)\}_{j=1}^{m} \le m-1$. Значит, $R(f) \le m-1$ согласно (13).

Предположим, что $R(f) = m - 1$. Нужно доказать, что тогда $f \sim \sigma_L^k$. Для этого достаточно проверить выполнение условий леммы 4. Если f не имеет нулей, кроме $z = 0$, то эти условия выполнены. Пусть f имеет нули, отличные от $z = 0$. Возьмем любой $z_0 \ne 0$ такой, что $f(z_0) = 0$. Выбирая в (12) $z = z_0$, получаем

$$\sum_{j=1}^{m} \phi_j(x,0)\psi_j(z_0) = 0. \tag{15}$$

Так как $R(f) = m-1$, то согласно (13)

$$\operatorname{rank}\{\phi_j(x,0)\}_{j=1}^m = m-1.$$

Поэтому из (14), (15) следует линейная зависимость векторов

$$(\psi_1(0),\dots,\psi_m(0)), \quad (\psi_1(z_0),\dots,\psi_m(z_0)).$$

Поскольку эти векторы ненулевые, то для некоторой постоянной $C \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\psi_j(z_0) = C\psi_j(0), \quad j=\overline{1,m}.$$

Используя (2), заключаем

$$f(x+z_0)f(y+z_0)f(x+y-z_0) = \sum_{j=1}^m \phi(x,y)\psi_j(z_0) =$$
$$= C\sum_{j=1}^m \phi(x,y)\psi_j(0) = Cf(x)f(y)f(x+y).$$

Следовательно, f удовлетворяет всем условиям леммы 4. Из последней вытекает, что $f \sim \sigma_L^k$. □

Отметим, что лемм 5, 6 достаточно для решения (2) при $m \le 3$. Чтобы рассмотреть случаи, когда $m = 4, 5$, нам понадобятся дополнительные свойства.

Лемма 7. *Пусть f — решение (2). Тогда функции ϕ_j, ψ_j из равенства (2) являются целыми.*

Доказательство мы опускаем. Оно проводится точно так же, как и обоснование соответствующего утверждения для функционального уравнения (9) (см. [2, § 1]).

Лемма 8. *Пусть f — решение (2). Тогда кратность любого нуля f не больше, чем $(m-1)/2$.*

Доказательство. Поскольку для любого z_0 функции $f(z)$ и $f(z-z_0)$ могут быть решениями (2) только одновременно, то достаточно доказать, что кратность нуля $z=0$ функции f не превосходит $(m-1)/2$.

Пусть кратность нуля $z=0$ функции f равна k. Выбирая в (2) $y=x$, получаем

$$f^2(x+z)f(2x-z) = \sum_{j=1}^m \phi_j(x,x)\psi_j(z). \tag{16}$$

Предположим, что $k > (m-1)/2$. Для любого фиксированного x точка $z=-x$ является нулем функции $z \to f^2(x+z)f(2x-z)$ кратности, не меньшей, чем $2k$. Так как $2k > m-1$, то дифференцируя (16) l раз по z ($l=\overline{0,m-1}$) и подставляя $z=-x$, имеем

$$\sum_{j=1}^m \phi_j(x,x)\psi_j^{(l)}(-x) = 0, \quad l=\overline{0,m-1}. \tag{17}$$

Вектор-функция $x \to (\phi_1(x,x), \dots, \phi_m(x,x))$ нигде не обращается в нуль, т.к. иначе из (2) вытекает, что $f \equiv 0$. Поэтому, рассматривая (17), как систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно $\phi_1(x,x), \dots, \phi_m(x,x)$, приходим к выводу:

$$\forall x \in \mathbb{C} \qquad \det \begin{pmatrix} \psi_1(-x) & \psi_2(-x) & \dots & \psi_m(-x) \\ \psi_1'(-x) & \psi_2'(-x) & \dots & \psi_m'(-x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_1^{(l)}(-x) & \psi_2^{(l)}(-x) & \dots & \psi_m^{(l)}(-x) \end{pmatrix} = 0,$$

т.е. вронскиан системы $\{\psi\}_{j=1}^{m}$ всюду равен нулю. Поскольку ψ_j целые, то отсюда следует их линейная зависимость [10]. Это невозможно согласно лемме 1. $\square$

Лемма 9. *Если $m > 3$, то $R(f) \le m-2$ для любого решения f уравнения (2).*

Доказательство. Предположим, что $R(f) \ge m-1$. Тогда согласно лемме 8

$$R(f) = m-1, \quad f \sim \sigma_L^k.$$

Поскольку $R(\sigma_L^k) = k+1$, то $k+1 = m-1$, т.е. $k = m-2$, $f \sim \sigma_L^{m-2}$. Применяя лемму 8, получаем $m-2 \le (m-1)/2$. Это возможно только при $m \le 3$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Пусть $m \le 5$. Используя (13) при $m \le 3$ и лемму 9 при $m = 4, 5$, получаем

$$R(f) \le 3.$$

По теореме 3 функция f эквивалентна одной из функций вида 1, σ_L, F_{L,z_0}. Последняя из них есть решение (2) при $m = 6$ согласно лемме 3. Поэтому $f \sim 1$ или $f \sim \sigma_L$. $\square$

Список литературы

[1] В.М. Бухштабер, Д.В. Лейкин, “Трилинейные функциональные уравнения”, *УМН*, **60**:2 (2005), 151–152.

[2] В.А. Быковский, “Гиперквазимногочлены и их приложения”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:3 (2016), 34–46.

[3] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа.* Т. 2, Физматгиз, М., 1963.

[4] С. Стоилов, *Теория функций комплексного переменного.* Т. 1, Изд-во иностр. литер., М., 1962.

[5] R. Rochberg, L. Rubel, “A Functional Equation”, *Indiana Univ. Math. J.*, **41**:2 (1992), 363–376.

[6] M. Bonk, “The addition formula for theta function”, *Aequationes Math.*, **53**:1–2 (1997), 54–72.

[7] M. Bonk, “The addition theorem of Weierstrass's sigma function”, *Math. Ann.*, **298**:1 (1994), 591–610.

[8] M. Bonk, “The Characterization of Theta Functions by Functional Equations”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **65** (1995), 29–55.

[9] А.А. Илларионов, “Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:4 (2016), 43–54.
[10] G. Peano, “Sur le determinant wronskien”, *Mathesis IX*, 1889, 110–112.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 30 сентября 2016 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00203), ПФИ ДВО РАН “Дальний Восток” (проект № 15-I-4-047), а также гранта Правительства Хабаровского края (распоряжение Правительства Хабаровского края от 29 июня 2016 г. № 479-РП).

Illarionov A. A. Solutions of a functional equation concerning with trilinear differential operators. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 2. P. 169–180.

ABSTRACT

We solve the functional equation

$$f(x+z)f(y+z)f(x+y-z)=\sum_{j=1}^{m}\phi_j(x,y)\psi_j(z)$$

for $m \leq 5$.

Key words: *functional equation, the Weierstrass sigma function, elliptic function, addition theorems, trilinear equations.*