Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 1. С. 121–128

УДК 517.958
MSC2010 35Q60 35R30

© И. П. Яровенко[1]

Формула градиента выходящего сигнала в позитронно-эмиссионной томографии

Работа посвящена исследованию качественных свойств математической модели позитронно-эмиссионной томографии. Модель представляет собой интегральное преобразование от искомой функции распределения источников активности. В работе доказана формула для градиента выходящего сигнала. Приводятся условия, при выполнении которых градиент решения будет иметь особенность.

Ключевые слова: *теория переноса излучения, позитронно-эмиссионная томография.*

1. Введение

Позитронно-эмиссионная томография (сокращенно ПЭТ) является одним из наиболее информативных методов, применяемых в ядерной медицине. В основе принципа ПЭТ лежит регистрация двух противоположно направленных гамма-лучей с одинаковой энергией, возникающих в результате аннигиляции позитронов, излучаемых специальным препаратом, который вводится в тело пациента. Регистрация пары фотонов, родившихся в результате аннигиляции, является своеобразным «фильтром», помогающим выделять именно те траектории фотонов, которые несут необходимую информацию о распределении источника активности в веществе [1]. Основной проблемой при этом является наличие в исследуемой среде эффекта рассеяния, в результате которого один или оба фотона, возникших в результате аннигиляции, изменяют свое первоначальное направление движения, что в итоге приводит к выделению ложных траекторий и, как следствие к возникновению «артефактов» на получаемых томограммах.

Это обстоятельство приводит к необходимости разрабатывать новые методы обработки информации. Основным подходом в данном направлении является построение методов фильтрации рассеянного сигнала (обзор данных методов можно

[1]Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `yarovenko@iam.dvo.ru`

найти в [2]). Другой, менее распространенный подход, состоит в попытке учесть информацию, содержащуюся в рассеянном сигнале [3, 4, 5, 6, 7].

Данная работа продолжает исследования по применению индикатора неоднородности в позитронно-эмиссионной томографии, начатые в [7]. Индикатор неоднородности был введен в работе [8] для нахождения границ включений, входящих в состав неоднородной среды. Изначально данная задача исследовалась в рамках трансмиссионной томографии. Строгое математическое обоснование индикатора неоднородности было приведено в статье [9]. Он представляет собой интегро-дифференциальный оператор, действующий на функцию, заданную на границе исследуемой области и описывающую плотность выходящего из среды излучения. В результате такого воздействия получается функция, определенная уже на всей области, которая конечна внутри каждого из включений и неограниченно растет при приближении к границе неоднородности. В позитронно-эмиссионной томографии неоднородности порождаются неравномерностью пространственного распределения источников активности и коэффициента ослабления. Математическим эффектом, на основе которого построена работа индикатора неоднородности, является наличие особенностей у градиента, выходящего из среды излучения [10]. Численные эксперименты, проведенные в [7], показали наличие подобных особенностей и в позитронно-эмиссионной томографии. Настоящая работа посвящена исследованию поведения градиента выходящего излучения для простейшей модели позитронно-эмиссионной томографии. Показано, что модуль градиента решения может неограниченно возрастать при приближении линии отклика к касательной для поверхности разрыва коэффициентов математической модели. Подробно разобраны условия неограниченности градиента. Данные условия позволяют ввести в позитронно-эмиссионную томографию понятие, аналогичное понятию «меры видимости», введенному в [11].

2. Основные ограничения и предположения

Идеализированная интегральная модель традиционной позитронной эмиссионной томографии (ПЭТ) хорошо известна [1]. Для заданного распределения активности (изотопа) $f(r)$ внутри среды $G \subset R^3$ с коэффициентом ослабления $\mu(r)$ и для детекторов малых размеров A и B на поверхности ∂G просвечиваемого тела модель формирования данных имеет вид

$$g(A,B) = \exp\left\{-\int\limits_A^B \mu(r)\,dl\right\}\int\limits_A^B f(r)\,dl. \tag{1}$$

Здесь $r = (r_1, r_2, r_3)$ — точка области G, а интегрирование ведется вдоль отрезка, соединяющего детекторы, находящиеся в точках A и B.

Пусть $\Omega = \{\omega \in R^3 : |\omega| = 1\}$ — единичная сфера в трехмерном пространстве и $\omega \in \Omega$ — некоторое направление. Для точки $r \in G$ и направления $\omega \in \Omega$ рассмотрим луч $L_{r,\omega} = \{z : z = r + \omega t,\ t > 0\}$ и определим величину $d(r,\omega) = \mathrm{mes}_1(L_{r,\omega} \cap G)$, где символом mes_1 обозначена мера Лебега на прямой. Данная величина выражает расстояние от точки r до внешней границы в направлении ω.

Будем считать, что область G — ограниченная, выпуклая и допускает разбиение на конечное число попарно непересекающихся подобластей $G_1, G_2, \ldots, G_p$, таких что

$$G_0 = \bigcup_{i=1}^{p} G_i, \qquad G_i \cap G_j = \emptyset,\ i \neq j, \qquad \overline{G_0} = \overline{G}.$$

Символами $\partial G_i,\ i = 1, \ldots, p$ будем обозначать границы подобластей G_i, которые также будем считать кусочно дважды дифференцируемыми и в целом липщицевыми. Символом $\partial G = \partial \overline{G}$ будем обозначать внешнюю границу области G, которая в силу ограничений на $\partial G_i,\ i = 1, \ldots, p$, будет кусочно дважды непрерывно дифференцируема и в целом липшицева.

Положим, что для любых $r \in G_0, \omega \in \Omega$ луч $L_{r,\omega}$ пересекает границы областей G_i в конечном числе точек $y_j = r + t_j(r,\omega)\omega$. Условимся считать, что

$$0 < t_1(r,\omega) < t_2(r,\omega) < \ldots < t_{l(r,\omega)}(r,\omega) = d(r,\omega), t_0(r,\omega) = 0,$$

$$\sup_{r \in G_0, \omega \in \Omega} l(r,\omega) < \infty. \tag{2}$$

Относительно функций μ и f будем полагать, что они неотрицательны и ограничены на $\overline{G}$ и имеют непрерывные частные производные первого порядка в каждой из подобластей $G_i,\ i = 1, \ldots, p$.

Используя введенные обозначения, перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\widetilde{g}(r,\omega) = g(r - d(r,-\omega)\omega, r + d(r,\omega)\omega) =$$
$$= \exp\left\{ -\int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} \mu(r + \omega t)\, dt \right\} \int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} f(r + \omega t)\, dt. \tag{3}$$

Нашей дальнейшей целью будет исследование дифференцируемости величины $\widetilde{g}$ по пространственной переменной $r \in G$ и получение формулы для ее градиента.

3. Формула градиента выходящего излучения

Определим множество $\{L\}$ лучей $L_{r,\omega}$ таких, что любой из них не будет касательным к поверхностям $\partial G_i,\ i = 1, \ldots, p$, в тех точках, которые являются пересечением $L_{r,\omega}$ и ∂G_i, и поверхности ∂G_i в любой из точек пересечения с лучом $L_{r,\omega}$ являются гладкими. Справедливы следующие леммы, доказательство которых может быть найдено в [10].

Лемма 1. *Пусть $r_0 \in R^3, \omega \in \Omega$, луч $L_{r_0,\omega} \in \{L\}$ и существует точка $y_0 \in L_{r_0,\omega} \cap \partial G_i$ при некотором фиксированном $i, 1 \leq i \leq p$. Тогда*

1. существует окрестность $V(r_0)$ точки r_0 такая, что при всех $r \in V(r_0)$ луч $L_{r,\omega}$ пересекает ∂G_i в точках $y = r + t(r,\omega)\omega$, где $t(r,\omega)$ — непрерывная в $V(r_0)$ функция, имеющая непрерывные производные первого порядка по r_1, r_2, r_3, и вблизи $y_0 = r_0 + t(r_0,\omega)\omega$ других точек пересечения $L_{r,\omega}$ и ∂G_i нет;

2. для градиента от функции $t(r,\omega)$ верно равенство

$$\nabla_r t(r,\omega) = -\frac{n(y)}{n(y)\cdot\omega},\ y = r + t(r,\omega)\omega, \tag{4}$$

где $n(y)$ — единичный вектор внутренней нормали к поверхности ∂G_i в точке $y \in \partial G_i$;

3. существует число $\delta > 0$ (зависящее от r_0, ω) такое, что при любом $r \in V(r_0)$ для точек $z = r + t\omega$, $|t - t(r,\omega)| < \delta$ имеет место неравенство

$$|z - y| \le \mathrm{const}\cdot\rho(z, \partial G_i), \tag{5}$$

где $y = r + t(r,\omega)\omega$.

Лемма 2. *Пусть $r_0 \in G, \omega \in \Omega$, луч $L_{r_0,\omega} \in \{L\}$. Луч $L_{r_0,\omega}$ пересекает G_0 кроме точки r_0, по конечному числу отрезков $\{r + t\omega,\ t_{j-1}(r_0,\omega) < t < t_j(r_0,\omega)\}$, $j = 1,\dots,l(r,\omega)$, так, что точки $r_0 + t_j(r_0,\omega)\omega$, $j = 1,\dots,l(r_0,\omega)$ принадлежат ∂G_0. Тогда существует окрестность $U(r_0)$ точки r_0 такая, что для всех $r \in U(r_0)$ количество отрезков в пересечении луча $L_{r,\omega}$ и множества G_0 постоянно, т.е. $l(r,\omega) = l(r_0,\omega) = l_0$.*

Пусть $r_0 \in G_0$ и $\omega \in \Omega$ — некоторое фиксированное направление такое, что $L_{r_0,\omega}, L_{r_0,-\omega} \in \{L\}$. Согласно леммам 1 и 2 существует окрестность $U(r_0)$ точки r_0 такая, что $l(r,\omega) = l(r_0,\omega) = l_0^+$ и $l(r,-\omega) = l(r_0,-\omega) = l_0^-$ и пересечение лучей $L_{r_0,\omega}, L_{r_0,-\omega} \in \{L\}$ с множеством G_0 состоит из отрезков $\{r_0 + \omega t,\ t_{j-1}(r_0,\omega) < t < t_j(r_0,\omega)\}$, $j = 1,\dots,l(r_0,\omega)$ и $\{r_0 - \omega t,\ t_{j-1}(r_0,-\omega) < t < t_j(r_0,-\omega)\}$, $j = 1,\dots,l(r_0,-\omega)$, где функции $t_j(r,\omega), t_k(r,-\omega)$, $j = 1,\dots,l_0^+$, $k = 1,\dots,l_0^-$ имеют непрерывные частные производные первого порядка по r_1, r_2, r_3. В этих обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для всех $r \in U(r_0), \omega \in \Omega$ существует градиент функции $\widetilde{g}$, и для него верна формула*

$$\nabla_r \widetilde{g}(r,\omega) = -\sum_{j=-l_0^-}^{l_0^+}\left[\langle f(y_j)\rangle - \int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} f(r+\omega t)\,dt\langle\mu(y_j)\rangle\right]\times$$
$$\times\frac{n(y_j)}{n(y_j)\cdot\omega}\exp\left\{-\int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)}\mu(r+\omega t)\,dt\right\} + O(1), \tag{6}$$

где $y_j = r + t_j(r,\omega)\omega$, $t_{-j}(r,\omega) = t_j(r,-\omega)$, угловые скобки обозначают величину разрыва (скачка) выражения в скобках, $O(1)$ — некоторая ограниченная функция.

Доказательство. Изучим сначала интеграл

$$\int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)}\mu(r+t\omega)\,dt = \sum_{j=1}^{l_0^+}\int\limits_{t_j(r,\omega)}^{t_{j+1}(r,\omega)}\mu(r+t\omega)\,dt + \sum_{j=1}^{l_0^-}\int\limits_{t_j(r,-\omega)}^{t_{j+1}(r,-\omega)}\mu(r-t\omega)\,dt. \tag{7}$$

Ясно, что $t_0(r, \pm\omega) = 0$, $l_0^+ \geq 1, l_0^- \geq 1$, $t_{l_0^+}(r, \omega) = d(r, \omega)$, $t_{l_0^-}(r, -\omega) = d(r, -\omega)$. В силу ограничений на функции f, μ и область G, все слагаемые в правой части (6) будут непрерывно дифференцируемы по r_m, $m = 1, 2, 3$. Обозначим

$$\mu^+(y_j) = \lim_{t \to t_j(r, \pm\omega) - 0} \mu(r \pm t\omega),$$
$$\mu^-(y_j) = \lim_{t \to t_j(r, \pm\omega) + 0} \mu(r \pm t\omega),$$
$$\langle \mu(y_j) \rangle = \mu^+(y_j) - \mu^-(y_j).$$

Дифференцируя (7) по r_m, $m = 1, 2, 3$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial r_m} \int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} \mu(r + \omega t)\, dt = \sum_{j=1}^{l_0^+} \left[\mu^+(y_j) \frac{\partial t_j(r, \omega)}{\partial r_m} - \mu^-(y_{j-1}) \frac{\partial t_j(r, \omega)}{\partial r_m} \right] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{l_0^-} \left[\mu^+(y_j) \frac{\partial t_j(r, -\omega)}{\partial r_m} - \mu^-(y_{j-1}) \frac{\partial t_j(r, -\omega)}{\partial r_m} \right] + \int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} \frac{\partial}{\partial r_m} \mu(r + t\omega)\, dt. \quad (8)$$

Отсюда, применяя обозначение $t_{-j}(r, \omega) = t_j(r, -\omega)$ и учитывая, что $t_0(r, \pm\omega) = 0$, после некоторой перегруппировки слагаемых приходим к выражению

$$\frac{\partial}{\partial r_m} \int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} \mu(r + \omega t)\, dt = \sum_{j=-l_0^-}^{l_0^+} \langle \mu(y_j) \rangle \frac{\partial t_j(r, \omega)}{\partial r_m} + \int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} \frac{\partial}{\partial r_m} \mu(r + t\omega)\, dt. \quad (9)$$

Проводя рассуждения аналогичные приведенным выше, приходим к следующей формуле для производной интеграла от источника активности

$$\frac{\partial}{\partial r_m} \int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} f(r + \omega t)\, dt = \sum_{j=-l_0^-}^{l_0^+} \langle f(y_j) \rangle \frac{\partial t_j(r, \omega)}{\partial r_m} + \int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} \frac{\partial}{\partial r_m} f(r + t\omega)\, dt. \quad (10)$$

Далее выясним вид производной от функции $\widetilde{g}(r, \omega)$ по r_m. Дифференцируя (3), получаем

$$\frac{\partial}{\partial r_m} \widetilde{g}(r, \omega) = \frac{\partial}{\partial r_m} \left[\exp\left\{ - \int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} \mu(r + \omega t)\, dt \right\} \right] \int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} f(r + \omega t)\, dt +$$
$$+ \exp\left\{ - \int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} \mu(r + \omega t) dt \right\} \frac{\partial}{\partial r_m} \int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} f(r + \omega t)\, dt. \quad (11)$$

Применяя (9) и (10), приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial r_m}\widetilde{g}(r,\omega) = -\int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} f(r+\omega t)\,dt \exp\left\{-\int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} \mu(r+\omega t)\,dt\right\} \sum_{j=-l_0^-}^{l_0^+} \langle\mu(y_j)\rangle \frac{\partial t_j(r,\omega)}{\partial r_m} + \\ + \exp\left\{-\int\limits_{-d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} \mu(r+\omega t)\,dt\right\} \sum_{j=-l_0^-}^{l_0^+} \langle f(y_j)\rangle \frac{\partial t_j(r,\omega)}{\partial r_m} + O(1). \quad (12)$$

Применяя к последнему выражению лемму 1, делаем вывод о справедливости формулы (6). □

Заметим, что если луч $L_{r,\omega}$ либо $L_{r,-\omega}$ стремится к касательной к поверхности ∂G_i в некоторой точке $y_j \in \partial G_i$, то $n(y_j)\cdot\omega \to 0$. Поэтому член суммы в (6) с индексом j будет стремиться к бесконечности, при условии, что соответствующая величина в квадратных скобках будет отлична от нуля. Рассмотрим более подробно выражение в квадратных скобках. По аналогии с [11] назовем его «мерой видимости» граничной точки y_i в направлении ω.

В зависимости от значений величин, входящих в меру видимости, рассмотрим три основных случая.

1.$\langle\mu(y_i)\rangle = 0$, $\langle f(y_i)\rangle \neq 0$. При выполнении этих условий мера видимости отлична от нуля и соответствующий ей член в сумме (6) будет неограничен при приближении луча $L_{r,\omega}$ к касательной к поверхности ∂G_0 в точке y_j.

2.$\langle\mu(y_i)\rangle \neq 0$, $\langle f(y_i)\rangle = 0$. В данном случае все зависит от выполнения условия

$$\int\limits_{-d(y_i,-\omega)}^{d(y_i,\omega)} f(y_i+t\omega)\,dt \neq 0. \quad (13)$$

Когда вышеуказанный интеграл отличен от нуля, «i»-ый член в сумме (6) будет неограничен. Физически условие (13) соответствует условию освещенности точки y_i. Если же условие (13) не выполняется, то «i»-ое слагаемое в формуле для градиента будет ограничено при всех $y \in \partial G_0$.

3. При выполнении условий $\langle f(y_i)\rangle \neq 0$, $\langle\mu_i\rangle \neq 0$ возможно два варианта. Если условие (13) нарушено, то, хоть точка y_i и не «освещена», градиент выходящего излучения будет иметь особенность за счет разрыва функции, описывающей источники активности. Когда условие (13) справедливо, наличие особенностей у градиента выходящего излучения будет зависеть как от соотношения скачков $\langle f\rangle$ и $\langle\mu\rangle$, так и от геометрии области G. Приведем пример такого случая.

Пример 1. *Пусть среда, представляющая собой шар расположенный в начале координат радиусом $R_1 = 5$, содержит в себе одну неоднородность в виде шара с центром в начале координат, радиусом $R_2 = 3$. При этом функции f и μ таковы, что выполняется соотношение*

$$\langle f(y)\rangle = 8\langle\mu(y)\rangle, \qquad |y| = R_2. \quad (14)$$

В этом случае градиент решения будет ограничен везде в области G при любых значениях функций f и μ, удовлетворяющих условию (14). В то же время при нарушении условия (14) градиент будет неограничен при приближении направления ω к касательному к шару радиуса R_2.

Заметим, что только из условия неограниченности какого-либо слагаемого в (6) нельзя делать вывод о неограниченности градиента, так как и другие слагаемые в правой части (6) могут быть неограниченны. Приведем пример, когда соотношения коэффициентов будут такими, что каждое из слагаемых в (6) будет неограниченным, а их сумма будет конечна.

Пример 2. *Пусть область G представляет собой шар радиусом 5 с центром в начале координат и содержит в себе два включения $G_1 = \{r : (r_1-2)^2+r_2^2+r_3^2 \leq 1\}$, $G_2 = \{r : (r_1+2)^2 + r_2^2 + r_3^2 \leq 1\}$, и пусть $G_3 = G \backslash (G_1 \cup G_2)$. Будем считать, что функции f и μ постоянны в каждой из областей G_i и равны μ_i, f_i $i = 1, 2, 3$, соответственно. Положим $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ и $f_3 = 2$, $f_1 = 1$, $f_2 = 3$. В силу непрерывности функции μ соответствующие ей скачки в формуле (6) будут нулевыми и выражение для градиента примет вид*

$$\nabla_r \widetilde{g}(r, \omega) = -\sum_{j=-l_0^-}^{l_0^+} \langle f(y_j) \rangle \frac{n(y_j)}{n(y_j) \cdot \omega} \exp\{-|d(r, \omega) - d(r, -\omega)|\} + O(1), \tag{15}$$

Рассмотрим направление $\omega_0 = (1, 0, 0)$. При приближении ω к ω_0 в точках $y_1 = (-2, 1, 0)$ и $y_2 = (2, 1, 0)$ величины $n(y_j)/(n(y_j) \cdot \omega)$ будут неограниченно возрастать, однако в силу выполнения соотношения $\langle f(y_1) \rangle + \langle f(y_2) \rangle = 0$ особенности будут компенсировать друг друга и сумма их будет конечна.

Таким образом, неограниченность градиента выходящего сигнала зависит не только от соотношения коэффициентов в смежных подобластях, но и от их взаимного расположения и геометрических размеров. Несмотря на это, стоит отметить, что ситуации, приведенные в рассмотренных примерах, достаточно экзотичны и вряд ли могут встретиться на практике. Кроме того, обращение меры видимости в нуль, аналогичное рассмотренному в примере 2, может возникать лишь в конечном числе точек, в силу выполнения условия (2). В дальнейшем планируется использовать полученную для градиента формулу, при обосновании метода поэтапной реконструкции границ источников активности. Аналогичный метод в рентгеновской трансмиссионной томографии был предложен в [12, 13].

Список литературы

[1] Visvikis D., Cheze-Le Rest C., Jarritt P., "PET technology: current trends and future developments", *British J. Radiology*, **77**:923 (2004), 906–910.

[2] Zaidi H., Montandon M.-L., "Scatter compensation techniques in PET", *PET Clinics*, **2**:2 (2007), 219–234.

[3] Казанцев И.Г., Яровенко И.П., Прохоров И.В., "Моделирование процесса измерения комптоновского рассеяния в позитронной эмиссионной томографии", *Вычислительные технологии*, **16**:6 (2011), 27-37.

[4] Казанцев И.Г., Яровенко И.П., Прохоров И.П., "Аналитическое и статистическое моделирование формирования изображений рассеянного излучения в эмиссионной томографии", *Интерэкспо Гео-Сибирь*, **4** (2011), 94-99.

[5] Chinn G., Foudray A. M. K., Levin C. S., "A Method to include single photon events in image reconstruction for a 1 mm resolution PET system built with advanced 3-D positioning detectors", IEEE Nucl. Sci. Symposium (San Diego, 2006), 2007, 1740–1745.

[6] Kosters T., Natterer F., Wubbeling F., "Scatter correction in PET using the transport equation", IEEE Nucl. Sci. Symposium (San Diego, 2006), 2007, 3305–3309.

[7] Яровенко И.П., "Численные эксперименты с индикатором неоднородности в позитронно-эмиссионной томографии", *Сибирский журнал индустриальной математики*, 2011, № 1, 140-149.

[8] Аниконов Д.С., "Построение индикатора неоднородности при радиационном обследовании среды", *Доклады РАН*, **357**:3 (1997), 324-327..

[9] Anikonov D.S., "Integro-differential indicator of nonhomogenity in tomography problem", *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **7**:1 (1999), 17-59..

[10] Anikonov D.S., "A formula for the gradient of the transport equation solution", *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **4**:2 (1996), 85-100.

[11] Аниконов Д.С., Назаров В.Г., Прохоров И.В., "Видимые и невидимые среды в томографии", *Доклады Академии наук*, **357**:5 (1997), 599-603.

[12] Коновалова Д.С., "Поэтапное решение обратной задачи для уравнения переноса применительно к задаче томографии", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **49**:1 (2009), 189-199.

[13] Коновалова Д.С., Прохоров И.В., "Численная реализация алгоритма поэтапной реконструкции для задачи рентгеновской томографии", *Сибирский журнал индустриальной математики*, **11**:4 (2008), 61-65.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 4 сентября 2014 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 13-01-00275, 14-01-31131)

Yarovenko I. P. A formula for the gradient of the output signal in positron emission tomography. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 1. P. 121–128.

ABSTRACT

The work is devoted to the study of qualitative properties for the mathematical model of positron emission tomography. The model is the integral transform of unknown function describing the distribution of activity sources. We propose a formula for the gradient of the output signal. We give conditions under which the gradient of the output signal will have a singularity.

Key words: *radiation transfer theory, positron emission tomography.*