Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 1. С. 70–75

УДК 511.21
MSC2010 11B37

© М. Д. Монина[1]

О целочисленных последовательностях Сомос-8 и Сомос-9

В работе предлагается новый метод построения целочисленных последовательностей Сомос-8 и Сомос-9.

Ключевые слова: *нелинейные последовательности,квадратичные рекуррентные последовательности, сигма-функция Вейерштрасса, последовательности Сомоса.*

Введение

Для натурального $k \geqslant 2$ последовательность Сомос-k: $A : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ удовлетворяет квадратичному рекуррентному соотношению

$$A\,(n+k)\,A\,(n) = \sum_{j=1}^{[k/2]} \alpha_j A\,(n+k-j)\,A\,(n+j)$$

с константами α_j. В ситуации общего положения, за исключением некоторых вырожденных случаев, эта последовательность однозначно определяется коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{[k/2]}$ и начальными значениями $A(1), \ldots, A(k)$. В частных случаях с $\alpha_i = 1$ и начальными значениями, также равными 1 при $k = 4, 5, 6, 7$, в работе [1] Сомос предположил, что возникающие при этом последовательности состоят из натуральных чисел (см. обзор [2]). При $k = 8$ численные эксперименты показали, что это утверждение уже неверно. Фомин и Зелевинский в работе [3], опираясь на теорию кластерных алгебр, доказали, что при $k = 4, 5, 6, 7$ элементы последовательностей Сомоса являются целочисленными полиномами от коэффициентов α_i и формальных переменных $A^{\pm 1}(1), \ldots, A^{\pm 1}(k)$. Отсюда немедленно следует целочисленность последовательностей Сомоса с единичными коэффициентами и единичными начальными данными. При $k = 4, 5$ в работе [4] были построены более широкие классы целочисленных последовательностей Сомоса с удовлетворяющими некоторым условиям целыми начальными данными и рациональными коэффициентами.

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: `monina@iam.khv.ru`

Пусть Γ — произвольная дискретная аддитивная подгруппа (решётка) в поле комплексных чисел. Сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с решёткой Γ, определяется во формуле

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{w\in\Gamma\setminus\{0\}} (1 - \frac{z}{w})\, e^{\frac{z}{w}+\frac{1}{2}(\frac{z}{w})^2}.$$

В вырожденных случаях:

1) для $\Gamma = \{0\}$ $\qquad \sigma_\Gamma(z) = z$;

2) для $\Gamma = \{mw|m \in \mathbb{Z}\}$ с $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{nw}\right) e^{\frac{z}{nw}+\frac{1}{2}(\frac{z}{nw})^2} = \frac{w}{\pi} \sin\frac{\pi z}{w} e^{\frac{\pi^2}{6}(\frac{z}{w})^2}.$$

Сигма-функция является нечётной функцией с простыми полюсами в узлах решётки Γ. В работах [4], [5] и [6], а также в некоторых других неопубликованных работах было доказано что, за исключением некоторых вырожденных случаев, последовательность Сомос-4 имеет вид

$$A(n) = e^{an^2+bn+c}\sigma_\Gamma(z_0 + nz), \tag{1}$$

где a, b, c, z_0 и $z \neq 0$ — произвольные комплексные числа, а Γ — любая решётка на комплексной плоскости.

В настоящей работе доказывается, что если A — целочисленная последовательность Сомоса вида (1), l, t и $N \neq 0$ — целые, то при некоторых ограничениях на A, l, t и N, целочисленная последовательность $B : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, определяемая равенством,

$$B(n) = lA(n) + tA(n + N),$$

является последовательностями Сомос-8 или Сомос-9.

Автор благодарит В. А. Быковского и А. В. Устинова за внимание к работе.

1. Эллиптические системы последовательностей

В докладе [7] была предложена следующая конструкция.

Пусть $A, B : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — две последовательности, тождественно не равные нулю, для которых найдутся $4k$ других последовательностей

$$C_1^{(0)}, \ldots, C_k^{(0)}, D_1^{(0)}, \ldots, D_k^{(0)} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C},$$
$$C_1^{(1)}, \ldots, C_k^{(1)}, D_1^{(1)}, \ldots, D_k^{(1)} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$$

таких, что для любых целых m, n выполняются равенства

$$A(m + n)B(m - n) = \sum_{j=1}^{k} C_j^{(0)}(m)D_j^{(0)}(n), \tag{2}$$

$$A(m+n+1)B(m-n) = \sum_{j=1}^{k} C_j^{(1)}(m) D_j^{(1)}(n). \tag{3}$$

В таком случае мы назовём пару (A, B) эллиптической системой ранга $k = R(A, B)$, где k — минимально возможное натуральное для представлений (2) и (3).

Из теории эллиптических функций (теоремы сложения для тэта-функций) непосредственно следует, что пара (A, A) вида (1) является эллиптической системой ранга 2.

Для любых целых $m_0, \ldots, m_k$ и $n_0, \ldots, n_k$ из (2) и (3) соответственно следуют равенства

$$\mathcal{D}^{(0)}_{A,B}\begin{pmatrix} m_0, \ldots, m_k \\ n_0, \ldots, n_k \end{pmatrix} = \\ = \det\begin{pmatrix} A(m_0+n_0)B(m_0-n_0) & \cdots & A(m_0+n_k)B(m_0-n_k) \\ \cdots & A(m_i+n_j)B(m_i-n_j) & \cdots \\ A(m_k+n_0)B(m_k-n_0) & \cdots & A(m_k+n_k)B(m_k-n_k) \end{pmatrix} = 0, \tag{4}$$

$$\mathcal{D}^{(1)}_{A,B}\begin{pmatrix} m_0, \ldots, m_k \\ n_0, \ldots, n_k \end{pmatrix} = \\ = \det\begin{pmatrix} A(1+m_0+n_0)B(m_0-n_0) & \cdots & A(1+m_0+n_k)B(m_0-n_k) \\ \cdots & A(1+m_i+n_j)B(m_i-n_j) & \cdots \\ A(1+m_k+n_0)B(m_k-n_0) & \cdots & A(1+m_k+n_k)B(m_k-n_k) \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

2. Целочисленные последовательности Сомос-8

Пусть A — целочисленная последовательность Сомоса вида (1), l и t — целые. Определим целочисленную последовательность $B : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по формуле

$$B(n) = lA(n) + tA(n+2N) \tag{6}$$

с фиксированным целым $N \neq 0$.

Теорема 1. *Если* $\mathcal{D}^{(0)}_{B,B}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 3,2,1,0 \end{pmatrix} \neq 0$, *то* B *— целочисленная последовательность Сомос-8.*

Доказательство: Для последовательностей A при любых целых m и n справедливо разложение

$$A(m+n)A(m-n) = C_1^{(0)}(m)D_1^{(0)}(n) + C_2^{(0)}(m)D_2^{(0)}(n).$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{gathered}
B(m+n)B(m-n) = (lA(m+n) + tA(m+n+2N))(lA(m-n) + tA(m-n+2N)) = \\
= l^2A(m+n)A(m-n) + t^2A(m+n+2N)A(m-n+2N) + \\
+ ltA(m+n)A(m-n+2N) + ltA(m+n+2N)A(m-n) = \\
= l^2C_1^{(0)}(m)D_1^{(0)}(n) + l^2C_2^{(0)}(m)D_2^{(0)}(n) + t^2C_1^{(0)}(m+2N)D_1^{(0)}(n) + \\
+ t^2C_2^{(0)}(m+2N)D_2^{(0)}(n) + ltC_1^{(0)}(m+N)D_1^{(0)}(n-N) + ltC_2^{(0)}(m+N)D_2^{(0)}(n-N) + \\
+ ltC_1^{(0)}(m+N)D_1^{(0)}(n+N) + ltC_2^{(0)}(m+N)D_2^{(0)}(n+N) = \\
= \left(l^2C_1^{(0)}(m) + t^2C_1^{(0)}(m+2N)\right) D_1^{(0)}(n) + \left(l^2C_2^{(0)}(m) + t^2C_2^{(0)}(m+2N)\right) D_2^{(0)}(n) + \\
+ ltC_1^{(0)}(m+N)\left(D_1^{(0)}(n-N) + D_1^{(0)}(n+N)\right) + ltC_2^{(0)}(m+N)\left(D_2^{(0)}(n-N) + D_2^{(0)}(n+N)\right).
\end{gathered}
$$

Поэтому пара (B, B) — эллиптическая система с $R(B, B) \leq 4$. Тогда, в соответствии с (4), для любого целого n

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}_{B,B}^{(0)} \begin{pmatrix} n+4, & 3, & 2, & 1, & 0 \\ 4, & 3, & 2, & 1, & 0 \end{pmatrix} = \\
= \mathcal{D}_{B,B}^{(0)} \begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 3,2,1,0 \end{pmatrix} B(n+8)B(n) - \mathcal{D}_{B,B}^{(0)} \begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,2,1,0 \end{pmatrix} B(n+7)B(n+1) + \\
+ \mathcal{D}_{B,B}^{(0)} \begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,1,0 \end{pmatrix} B(n+6)B(n+2) - \mathcal{D}_{B,B}^{(0)} \begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,2,0 \end{pmatrix} B(n+5)B(n+3) + \\
+ \mathcal{D}_{B,B}^{(0)} \begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,2,1 \end{pmatrix} B(n+4)B(n+4) = 0.
\end{gathered}
$$

Разделив все части последнего равенства на коэффициент при $B(n+8)B(n)$, получим утверждение теоремы 1.

§3. Целочисленные последовательности Сомос-9

Пусть A — целочисленная последовательность Сомоса вида (1) такая же, как в §2, l и t — целые. Определим целочисленную последовательность $B : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по формуле

$$
B(n) = lA(n) + tA(n+2N+1) \tag{7}
$$

с фиксированным целым N.

Теорема 2. *Если* $\mathcal{D}_{B,B}^{(1)} \begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 3,2,1,0 \end{pmatrix} \neq 0$, *то* B *— целочисленная последовательность Сомос-9.*

Доказательство: Как уже отмечалось ранее, для последовательностей A при любых целых m и n справедливо разложение

$$
A(m+n+1)A(m-n) = C_1^{(1)}(m)D_1^{(1)}(n) + C_2^{(1)}(m)D_2^{(1)}(n).
$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{gathered}
B(m+n+1)B(m-n)= \\
=\big(lA(m+n+1)+tA(m+n+2N+1)\big)\big(lA(m-n)+tA(m-n+2N)\big)= \\
=l^2A(m+n+1)A(m-n)+t^2A(m+n+2N+1)A(m-n+2N)+ \\
+ltA(m+n+1)A(m-n+2N)+ltA(m+n+2N+1)A(m-n)= \\
=l^2C_1^{(1)}(m)D_1^{(1)}(n)+l^2C_2^{(1)}(m)D_2^{(1)}(n)+t^2C_1^{(1)}(m+2N)D_1^{(1)}(n)+ \\
+t^2C_2^{(1)}(m+2N)D_2^{(1)}(n)+ltC_1^{(1)}(m+N)D_1^{(1)}(n-N)+ltC_2^{(1)}(m+N)D_2^{(1)}(n-N)+ \\
+ltC_1^{(1)}(m+N)D_1^{(1)}(n+N)+ltC_2^{(1)}(m+N)D_2^{(1)}(n+N)= \\
=\left(l^2C_1^{(1)}(m)+t^2C_1^{(1)}(m+2N)\right)D_1^{(1)}(n)+\left(l^2C_2^{(1)}(m)+t^2C_2^{(1)}(m+2N)\right)D_2^{(1)}(n)+ \\
+ltC_1^{(1)}(m+N)\left(D_1^{(1)}(n-N)+D_1^{(1)}(n+N)\right)+ltC_2^{(1)}(m+N)\left(D_2^{(1)}(n-N)+D_2^{(1)}(n+N)\right).
\end{gathered}
$$

Поэтому пара (B,B) — эллиптическая система с $R(B,B)\le 4$. Тогда, в соответствии с (5), для любого целого n

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}_{B,B}^{(1)}\begin{pmatrix} n+4, & 3, & 2, & 1, & 0 \\ 4, & 3, & 2, & 1, & 0 \end{pmatrix}= \\
=\mathcal{D}_{B,B}^{(1)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 3,2,1,0 \end{pmatrix}B(n+9)B(n)-\mathcal{D}_{B,B}^{(1)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,2,1,0 \end{pmatrix}B(n+8)B(n+1)+ \\
+\mathcal{D}_{B,B}^{(1)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,1,0 \end{pmatrix}B(n+7)B(n+2)-\mathcal{D}_{B,B}^{(1)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,2,0 \end{pmatrix}B(n+6)B(n+3)+ \\
+\mathcal{D}_{B,B}^{(1)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,2,1 \end{pmatrix}B(n+5)B(n+4)=0.
\end{gathered}
$$

Разделив все части последнего равенства на коэффициент при $B(n+9)B(n)$, получим утверждение теоремы 2.

3. Примеры

Пример 1. Положив в (6) $l=1$, $t=2$ и $N=1$, получим целочисленную последовательность B

$$
\begin{gathered}
\ldots,\ B(-6)=1647,\ B(-5)=360,\ B(-4)=73,\ B(-3)=29,\ B(-2)=11,\ B(-1)=5, \\
B(0)=4,\ B(1)=3,\ B(2)=3,\ B(3)=5,\ B(4)=7,\ B(5)=16,\ B(6)=49,\ \ldots,
\end{gathered}
$$

каждый член которой является решением уравнения

$$
\begin{gathered}
X(n+8)X(n)=\frac{5}{2}X(n+7)X(n+1)+\frac{75}{2}X(n+6)X(n+2)- \\
-15X(n+5)X(n+3)-54X(n+4)X(n+4).
\end{gathered}
$$

Пример 2. Положив в (7) $l = 1$, $t = 2$ и $N = 0$, получим целочисленную последовательность B

$$\ldots,\ B(-6)=2157,\ B(-5)=432,\ B(-4)=105,\ B(-3)=37,\ B(-2)=13,\ B(-1)=7,$$
$$B(0)=4,\ B(1)=3,\ B(2)=3,\ B(3)=3,\ B(4)=5,\ B(5)=8,\ B(6)=17,\ \ldots,$$

каждый член которой является решением уравнения

$$X(n+9)X(n) = \frac{9}{4}X(n+8)X(n+1) + 55X(n+7)X(n+2)+$$
$$+\frac{255}{4}X(n+6)X(n+3) - 255X(n+4)X(n+4).$$

Список литературы

[1] M. Somos, *Problem 1470*, Crux Mathematicorum 15 208, 1989.

[2] D. Gale, “Mathematical Entertainments: The Strange and Surprising Saga of the Somos Sequences”, Math. Intel., **13**, 1991, 40–42.

[3] S. Fomin, A. Zelevinsky, “The Laurent Phenomenon”, Adv. Appl. Math., **28**, 2002, 19–44.

[4] A. N. W. Hone, C. S. Swart, “Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 and Somos 5 sequences”, *Mathematical Proceedigs of the Cambridge Philosophical Society*, **145** (2008), 65–85.

[5] A. N. W. Hone, “Elliptic curves and quadratic recurrence sequences”, Bull. Lond. Math. Soc., **37**, 2005, 161–171.

[6] A. N. W. Hone, “Sigma function solution of the initial value problem for Somos-5 sequences”, Trans. Amer. Math. Soc. at press; math. NT/0501554, 2006.

[7] V. Bykovskii, “Elliptic systems of sequences and functions”, 2015, http://www.skoltech.ru/app/data/uploads/sites/29/2015/02/Skolkovo_Bykovskii.pdf.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 29 апреля 2015 г.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 14-01-00203).

Monina M. D. On integer Somos-8 and Somos-9 sequences. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 1. P. 70–75.

ABSTRACT

The article offers a new method for constructing of integer sequences.

Key words: *nonlinear sequences, quadratic recursive sequences, Weierstrass sigma-function, Somos sequences.*