Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 1. С. 96–99

УДК 517.524
MSC2010 11A55, 14M25

© А. В. Устинов[1]

О цепных дробях равной длины

В статье приводится однопараметрическое семейство рациональных чисел, для которых разложения в приведённые регулярные цепные дроби (дроби Хирцебруха) имеют одинаковую длину.

Ключевые слова: *цепные дроби.*

Для рациональных чисел из интервала $(0,1)$ будем рассматривать разложения в *приведённые регулярные цепные дроби* (см. [3])

$$\langle x_1,\ldots,x_m\rangle := \cfrac{1}{x_1-\cfrac{}{\ddots-\cfrac{1}{x_m}}}\qquad (x_1,\ldots,x_m\geq 2),$$

известные также как дроби Хирцебруха.

Используя методы торической геометрии, Займи доказал (см. [4]), что для натуральных a, b, n, удовлетворяющих условиям $(a,b)=(ab,n)=1$ при

$$k\equiv ab^{-1}\,(\mathrm{mod}\ n)\qquad (1\leq k<n),\qquad k'\equiv ab^{-1}\,(\mathrm{mod}\ n)\qquad (1\leq k'<n+ab),$$

разложения чисел $\frac{k}{n}$ и $\frac{k'}{n+ab}$ в приведённые регулярные цепные дроби имеют равную длину.

Ниже приводится элементарное доказательство более общего утверждения.

Теорема. *Если $(n,ab)=1$ и $n>ab$, то разложения всех чисел*

$$\left\{\frac{ab^{-1}\quad (\mathrm{mod}\ (n+kab))}{n+kab}\right\}\qquad (k\geq 0)$$

в приведённые регулярные цепные дроби имеют равную длину и отличаются только одним неполным частным.

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, Хабаровское отделение, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, д. 54. Электронная почта: `ustinov@iam.khv.ru`

Замечание. Доказательство теоремы достаточно провести для взаимно простых чисел a и b, поскольку любой их общий делитель можно убрать за счёт изменения параметра k: если $d = (a, b)$, $a = da_1$, $b = db_1$, то

$$\left\{\frac{ab^{-1} \pmod{(n + kab)}}{n + kab}\right\} = \left\{\frac{a_1b_1^{-1} \pmod{(n + kab)}}{n + kab}\right\} = \\ = \left\{\frac{a_1b_1^{-1} \pmod{(n + (kd^2)a_1b_1)}}{n + (kd^2)a_1b_1}\right\}.$$

Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $(a, b) = 1$.

Доказательство теоремы основано на свойствах (модифицированных) *континуантов* $K(x_1, \ldots, x_n)$ (см. [1], [2]). Эти полиномы определяются с помощью начальных условий

$$K() = 1, \quad K(x_1) = x_1$$

и рекуррентного соотношения

$$K(x_1, \ldots, x_n) = x_nK(x_1, \ldots, x_{n-1}) - K(x_1, \ldots, x_{n-2}) \qquad (n \geq 2).$$

(При определении стандартных континуантов, которые используются при анализе классических цепных дробей, в рекуррентном соотношении знак «минус» меняется на «плюс».) Для удобства будем считать, что $K_{-1} := 0$ (пустая приведённая регулярная цепная дробь равна 0).

В терминах континуантов цепная дробь записывается в виде

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \frac{K(x_2, \ldots, x_n)}{K(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Перечислим основные свойства континуантов (см. [1]).

1°. При $n \geq 0$

$$K(x_1, \ldots, x_n) = K(x_n, \ldots, x_1).$$

2°. При m, $n \geq 0$

$$K(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{m+n}) \\ = K(x_1, \ldots, x_n)K(x_{n+1}, \ldots, x_{m+n}) - K(x_1, \ldots, x_{n-1})K(x_{n+2}, \ldots, x_{m+n}).$$

3°. При $n \geq 1$

$$\begin{vmatrix} K(x_2, \ldots, x_{n-1}) & K(x_2, \ldots, x_n) \\ K(x_1, \ldots, x_{n-1}) & K(x_1, \ldots, x_n) \end{vmatrix} = -1.$$

В частности, если

$$\frac{A}{a} = \langle r_1, \ldots, r_v\rangle = \frac{K(r_2, \ldots, r_v)}{K(r_1, \ldots, r_v)},$$

то

$$K(r_1, \ldots, r_{v-1}) = A^{-1} \pmod{a}, \qquad K(r_2, \ldots, r_{v-1}) = \frac{AA^{-1} \pmod{a} - 1}{a}.$$

4°. (Тождество Эйлера, см. [1], [2].) При $m \geq 1$, $l \geq 0$, $n \geq l+1$

$$K(x_1,\dots,x_{m+n})K(x_{m+1},\dots,x_{m+l}) - K(x_1,\dots,x_{m+l})K(x_{m+1},\dots,x_{m+n})$$
$$+K(x_1,\dots,x_{m-1})K(x_{m+l+2},\dots,x_{m+n}) = 0.$$

Доказательство теоремы. Для данного n положим $a^{-1} := a^{-1} \pmod n$, $b^{-1} := b^{-1} \pmod n$ $(0 \leq a, b < n$, обратный элемент всегда будем предполагать наименьшим неотрицательным). Числа t_a, t_b определим с помощью равенств $aa^{-1} = 1+t_a n$, $bb^{-1} = 1+t_b n$. Пусть

$$\frac{A}{a} = \left\{\frac{bt_a}{a}\right\} = \langle r_1,\dots,r_v\rangle, \qquad A^{-1} := A^{-1} \,(\mathrm{mod}\; a);$$
$$\frac{B}{b} = \left\{\frac{at_b}{b}\right\} = \langle q_1,\dots,q_u\rangle, \qquad B^{-1} := B^{-1} \,(\mathrm{mod}\; b);$$
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \langle q_1,\dots,q_u,x,r_v,\dots,r_1\rangle.$$

Из свойств 2°, 3° и рекуррентного соотношения, задающего континуанты, следует, что

$$Q(x) = K(q_1,\dots,q_u,x,r_v,\dots,r_1) =$$
$$xK(q_1,\dots,q_u)K(r_v,\dots,r_1) - K(q_1,\dots,q_{u-1})K(r_v,\dots,r_1) - K(q_1,\dots,q_u)K(r_{v-1},\dots,r_1)$$
$$= xab - aB^{-1} - bA^{-1}.$$

Значит,

$$Q(x) \equiv -bA^{-1} \equiv -b((bt_a)^{-1} \,(\mathrm{mod}\; a)) \equiv -t_a^{-1} \equiv n \,(\mathrm{mod}\; a),$$
$$Q(x) \equiv -aB^{-1} \equiv -a((at_b)^{-1} \,(\mathrm{mod}\; b)) \equiv -t_b^{-1} \equiv n \,(\mathrm{mod}\; b).$$

Следовательно,

$$Q(x) \equiv n \,(\mathrm{mod}\; ab),$$

и для некоторого целого x_0 $Q(x_0) = n$. По условию теоремы $n > ab$, поэтому

$$x_0 ab - aB^{-1} - bA^{-1} > ab.$$

Таким образом, $x_0 \geq 2$ и разложение $\langle q_1,\dots,q_u,x_0,r_v,\dots,r_1\rangle$ действительно является приведённой регулярной цепной дробью. Выбирая произвольное $x = x_0 + k$, мы получаем прогрессию $n + kab$, как в формулировке теоремы.

Проверим числитель $P(x)$. Последнее соотношение $P(x) \equiv ab^{-1} \pmod{Q(x)}$ следует из тождества

$$bP(x) - BQ(x) = a,$$

которое является частным случаем тождества Эйлера 4°. Это тождество можно непосредственно вывести из свойств 1°–3°:

$$P(x) = K(q_2,\dots,q_u,x,r_v,\dots,r_1) =$$
$$xK(q_2,\dots,q_u)K(r_v,\dots,r_1) - K(q_2,\dots,q_{u-1})K(r_v,\dots,r_1) - K(q_2,\dots,q_u)K(r_{v-1},\dots,r_1)$$
$$= xaB - a\frac{BB^{-1}-1}{b} - BA^{-1},$$
$$bP(x) - a = B(xab - aB^{-1} - bA^{-1}) = BQ(x).$$

Список литературы

[1] Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О., *Конкретная математика. Основание информатики*, Мир, М., 1998.

[2] А. В. Устинов, “Короткое доказательство тождества Эйлера для континуантов”, *Матем. заметки*, **79**:1 (2006), 155–156; *Math. Notes*, **79**:1 (2006), 146–147.

[3] Perron O., *Die Lehre von den Kettenbruechen (Band 1).*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1954.

[4] Zaimi G., *Length of Hirzebruch continued fractions*, http://mathoverflow.net/.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 23 февраля 2014 г.

Работа выполнена при поддержке фонда «Династия» и фонда РФФИ (грант 13-01-91151-ГФЕН_а)

Ustinov A. V. On continued fractions of equal length. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 1. P. 96–99.

ABSTRACT

The article gives a one-parameter family of rational numbers whose expansions in reduced regular continued fractions (Hirzebruch fractions) have equal lengths.

Key words: *continued fractions.*