Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 1. С. 90–95

УДК 511.336+511.212
MSC2010 11L05, 11A15, 65T50

© А. В. Устинов[1]

Вычисление суммы Гаусса с помощью дискретного преобразования Фурье

В статье предлагается новый способ вычисления суммы Гаусса, основанный на использовании дискретного преобразования Фурье. В качестве следствия доказывается квадратичный закон взаимности Гаусса.

Ключевые слова: *сумма Гаусса, дискретное преобразование Фурье, квадратичный закон взаимности.*

Один из способов вычисления суммы Гаусса

$$S(q)=\sum_{x=1}^{q} e(x^2/q),$$

где $e(t)=e^{2\pi i t}$, состоит в применении формулы суммирования Пуассона

$$\sum_{x=0}^{q}{}' f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^q f(t)e(-kt)dt \tag{1}$$

(штрих означает, что крайние слагаемые берутся с коэффициентом $1/2$) к функции $f(x)=e(x^2/q)$, см. [2, § 111–112], [3, § 2]. В предлагаемой заметке приводится «элементарный» аналог этого подхода, основанный на использовании дискретного преобразования Фурье. Другие варианты применения дискретного преобразования Фурье к доказательству тождеств см., например, в [1, 5, 6, 7].

Пусть функция f определена для всех целых x из интервала $0\le x<p$, где p — некоторое натуральное число. Тогда в каждой из этих точек функция f представляется конечным рядом Фурье

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p-1} C_p(k)e\left(\frac{kx}{p}\right), \qquad 0\le x<p, \tag{2}$$

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, Хабаровское отделение, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, д. 54. Электронная почта: ustinov@iam.khv.ru

где $C_p(k)$ — конечные коэффициенты Фурье функции f, вычисляемые по формуле

$$C_p(k) = \frac{1}{p} \sum_{x=0}^{p-1} f(x) e\left(-\frac{kx}{p}\right) \qquad 0 \leq k < p. \tag{3}$$

Следующая лемма содержит равенство, которое можно считать дискретным аналогом формулы (1).

Лемма 1. *Пусть p_1, p_2 — натуральные числа, $p = p_1 p_2$, функция f определена для всех целых x из интервала $0 \leq x < p$ и $C_p(k)$ — её конечные коэффициенты Фурье. Тогда*

$$\sum_{y=0}^{p_2-1} f(p_1 y) = p_2 \sum_{n=0}^{p_1-1} C_p(p_2 n). \tag{4}$$

Доказательство непосредственно следует из равенств (2)–(3), см. [6].

Лемма 2. *Пусть r и q — натуральные числа, r — чётное, $q \not\equiv 2 \pmod 4$ и $P = r^2 q$. Тогда*

$$\frac{2}{1+i^{-q}} \cdot \frac{S(q)}{\sqrt{q}} = \frac{S(P)}{\sqrt{P}}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = e\left(x^2/P\right)$, заданную в точках $x = 0$, $1, \ldots, P-1$. Для её коэффициентов Фурье с чётными номерами справедливо представление

$$C_P(2m) = \frac{S(P)}{P} \cdot e\left(-\frac{m^2}{P}\right).$$

Применяя конечный аналог формулы суммирования Пуассона (4) к функции f с $p = P$, $p_1 = r$ и $p_2 = rq$, приходим к нужному соотношению:

$$\frac{S(q)}{q} = \sum_{n=0}^{r-1} C_P(rqn) = \frac{S(P)}{P} \sum_{n=0}^{r-1} e\left(-\frac{n^2 q}{4}\right) = \frac{S(P)}{P} \cdot \frac{r(1+i^{-q})}{2}.$$

□

Лемма 3. *Для любого натурального n*

$$\frac{S(4n)}{\sqrt{4n}} = \frac{4}{\sqrt{4n}} \sum_{x=0}^{n-1} e\left(\frac{x^2}{4n}\right) + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right).$$

Доказательство. Утверждение леммы является прямым следствием того, что функция $h(x) = e\left(\frac{x^2}{4n}\right)$ удовлетворяет условиям $h(x+2n) = h(x)$ и $h(2n-x) = h(x)$. □

Лемма 4. *Пусть $1 \leq a < n$. Тогда для суммы*

$$\sigma = \sum_{x=a}^{n-1} e\left(\frac{x^2}{4n}\right)$$

выполняется оценка $\sigma = O(n/a)$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность чисел $u_x = e\left(\frac{x(x+1)}{4n}\right)$, конечные разности которой устроены проще, чем для исходной последовательности $e\left(\frac{x^2}{4n}\right)$:

$$u_x - u_{x-1} = e\left(\frac{x^2}{4n}\right)\left(e\left(\frac{x}{4n}\right) - e\left(-\frac{x}{4n}\right)\right) = e\left(\frac{x^2}{4n}\right) \cdot 2i \sin\frac{\pi x}{2n}.$$

При $v_x = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi x}{2n}}$ по формуле преобразования Абеля

$$\sum_{x=a}^{b-1}(u_x - u_{x-1})v_x = \sum_{x=a}^{b-1} u_x(v_x - v_{x+1}) + u_{b-1}v_b - u_{a-1}v_a$$

находим

$$2i\sigma = \sum_{x=a}^{n-1} e\left(\frac{x^2+x}{4n}\right)\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2n}} - \frac{1}{\sin\frac{\pi(x+1)}{2n}}\right) + \frac{e\left(\frac{n(n-1)}{4n}\right)}{\sin\frac{\pi n}{2n}} - \frac{e\left(\frac{a(a-1)}{4n}\right)}{\sin\frac{\pi a}{2n}}.$$

Значит,

$$2|\sigma| \le \sum_{x=a}^{n-1}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2n}} - \frac{1}{\sin\frac{\pi(x+1)}{2n}}\right) + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi a}{2n}} = \frac{2}{\sin\frac{\pi a}{2n}} = O\left(\frac{n}{a}\right).$$

□

Лемма 5. *При любом $b > 0$*

$$\int_b^\infty e\left(x^2\right) dx = O\left(\frac{1}{b}\right).$$

Доказательство. Нужная оценка получается с помощью замены $y = x^2$ и интегрирования по частям:

$$\int_b^\infty e(x^2)dx = \int_{b^2}^\infty e(y)\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{e(y)}{4\pi i\sqrt{y}}\Big|_{b^2}^\infty + \int_{b^2}^\infty \frac{e(y)}{8\pi i \cdot y^{3/2}}dy = O\left(\frac{1}{b}\right).$$

□

Теорема. *Пусть q — натуральное число и $q \not\equiv 2 \pmod 4$. Тогда*

$$\frac{2}{1+i^{-q}} \cdot \frac{S(q)}{\sqrt{q}} = 4\int_0^\infty e(x^2)dx. \tag{5}$$

Доказательство. Для натуральных a и n таких, что $1 \le a < n$, вариация функции $e(x^2)$ на отрезке $[0, a/\sqrt{4n}]$ есть $O(a^2/n)$. Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{4n}} \sum_{x=0}^{a-1} e\left(\frac{x^2}{4n}\right) = \int\limits_0^{a/\sqrt{4n}} e(x^2)dx + O\left(\frac{a^2}{n^{3/2}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right).$$

Применяя леммы 3, 4 и 5, находим, что

$$\frac{S(4n)}{\sqrt{4n}} = 4\int\limits_0^{\infty} e(x^2)dx + O\left(\frac{a^2}{n^{3/2}}\right) + O\left(\frac{n^{1/2}}{a}\right) + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right).$$

При $a = [n^{2/3}]$ это приводит к равенству

$$\frac{S(4n)}{\sqrt{4n}} = 4\int\limits_0^{\infty} e(x^2)dx + O\left(n^{-1/6}\right).$$

Подставим полученную асимптотическую формулу в утверждение леммы 2:

$$\frac{2}{1+i^{-q}} \cdot \frac{S(q)}{\sqrt{q}} = \frac{S(P)}{\sqrt{P}} = 4\int\limits_0^{\infty} e(x^2)dx + O\left(P^{-1/6}\right) = 4\int\limits_0^{\infty} e(x^2)dx + O\left((r^2q)^{-1/6}\right).$$

Предельный переход при $r \to \infty$ завершает доказательство теоремы. □

Следствие 1. *Для любого натурального* q

$$S(q) = \frac{1+i^{-q}}{1+i^{-1}} \cdot \sqrt{q}.$$

Доказательство. При $q \equiv 2 \pmod 4$ утверждение следствия вытекает из равенства $S(q) = 0$, которое проверяется с помощью замены переменной $x \to x + q/2$. Поэтому будем предполагать, что $q \not\equiv 2 \pmod 4$. Правая часть равенства (5) не зависит от выбора q. Поэтому левая часть при $q = 1$ принимает то же значение, что и при произвольном q:

$$\frac{2}{1+i^{-1}} \cdot \frac{S(1)}{\sqrt{1}} = \frac{2}{1+i^{-q}} \cdot \frac{S(q)}{\sqrt{q}}.$$

Подставляя $S(1) = 1$, приходим к утверждению следствия. □

Замечание. Из доказанной теоремы и следствия 1, в частности, следуют равенства

$$\int\limits_0^{\infty} e(x^2)dx = \frac{1}{2(1+i^{-1})} = \frac{1+i}{4},$$

$$\int\limits_0^{\infty} \cos(2\pi x^2)dx = \int\limits_0^{\infty} \sin(2\pi x^2)dx = \frac{1}{4}.$$

В качестве ещё одного следствия доказанной теоремы можно получить квадратичный закон взаимности Гаусса.

Следствие 2. *Если p, q — нечётные простые числа и $p \neq q$, то*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Доказательство. Когда переменные x_1, x_2 меняются в пределах $1 \leq x_1 \leq p$, $1 \leq x_2 \leq q$, переменная $x = x_1 q + x_2 p$ пробегает полную систему вычетов по модулю pq. Следовательно

$$S(pq) = \sum_{x_1=1}^{p}\sum_{x_2=1}^{q} e\left(\frac{(x_1 q + x_2 p)^2}{pq}\right) = \sum_{x_1=1}^{p} e\left(\frac{q x_1^2}{p}\right)\sum_{x_2=1}^{q} e\left(\frac{p x_2^2}{q}\right).$$

Применяя равенство (см., например, [4, § 3])

$$\sum_{x=1}^{q} e(ax^2/p) = \left(\frac{a}{p}\right) S(p),$$

получаем тождество

$$S(pq) = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) S(p)S(q).$$

Подставляя в него значения сумм Гаусса из следствия 1, приходим к квадратичному закону взаимности:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{1+i^{-pq}}{1+i^{-p}} \cdot \frac{1+i^{-1}}{1+i^{-q}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

□

Список литературы

[1] Н. В. Бударина, В. А. Быковский, “Арифметическая природа тождеств для тройного и пятикратного произведений”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:2 (2011), 140–148.

[2] П. Г. Л. Дирихле, *Лекции по теории чисел*, ОНТИ МКТП, 1936.

[3] Г. Дэвенпорт, *Мультипликативная теория чисел*, Наука, Москва, 1971.

[4] Н. М. Коробов, *Тригонометрические суммы и их приложения*, Наука, М., 1989.

[5] Н. М. Коробов, “Специальные полиномы и их приложения Диофантовы приближения”, *Матем. Записки*, **2** (1996), 77–89.

[6] А. В. Устинов, “Дискретный аналог формулы суммирования Пуассона”, *Матем. заметки*, **73**:1 (2003), 106–112; *Math. Notes*, **73**:1 (2003), 97–102.

[7] А. В. Устинов, “Элементарный подход к вычислению $\zeta(2n)$”, *Чебышевский сборник*, **4** (2003), 106–110.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 23 февраля 2014 г.

Работа выполнена при поддержке фонда «Династия» и фонда РФФИ (грант 14-01-00203 А)

Ustinov A. V. Calculation of a Gauss sum via the discrete Fourier transform. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 1. P. 90–95.

ABSTRACT

The explicit formula for a Gauss sum is proved using the discrete Fourier transform. The Gauss quadratic reciprocity law is established as a corollary.

Key words: *Gauss sum, discrete Fourier transform, Gauss quadratic reciprocity law.*