Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 1. С. 73–89

УДК 517.95
MSC2010 35A01, 35K61, 35K65

© А. Г. Подгаев, Н. Е. Истомина[1]

О методах Фаэдо – Галёркина и монотонности в нецилиндрической области для вырождающегося квазилинейного уравнения

Разрабатывается модификация метода монотонности в естественных координатах без сведения задачи заменой переменных к случаю цилиндрической области. Построено семейство базисов, гладких по параметру, ортогональных и полных на каждом сечении области. Обосновано существование и единственность решения первой начально-краевой задачи для общей нецилиндрической области в многомерном случае.

Ключевые слова: *нецилиндрическая область, метод монотонности, построение семейства базисов, квазилинейное уравнение.*

Введение

Параболические задачи в нецилиндрических областях хорошо исследованы для линейных уравнений, причем в основном с одной пространственной переменной. Это работы [1–4]. Для случая многомерных уравнений предложена схема исследования в [5] с трудно проверяемыми условиями. Сведением задач заменой переменных к цилиндрическому случаю проведены исследования в [6–8]. В [9] и [10] предложен метод штрафа для гиперболических уравнений в расширяющейся с течением времени области, а в [9] также предложен и метод эллиптической регуляризации, позволяющие исследовать многомерные нелинейные задачи без замены переменных. Попытка перенести метод Фаэдо – Галеркина на случай нецилиндрических областей приводит к необходимости построения семейств функций, которые были бы базисами в пространствах $L_p(\Omega_t)$ для всех t, где Ω_t — сечение нецилиндрической области плоскостью $t = \text{const}$. В [11] предложен метод компактности для исследования квазилинейных параболических уравнений в нецилиндрических областях, в

[1]Тихоокеанский государственный университет, 680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136. Хабаровский пограничный институт Федеральной службы безопасности Российской Федерации, 680017, г. Хабаровск, ул. Большая, 85. Электронная почта: podgaev@mail.ru

котором трудность обоснования базисности снимается в силу одномерности уравнения.

В данной работе предложена модификация метода монотонности без сведения рассматриваемой задачи заменой переменных к случаю цилиндрической области. Построено семейство базисов, ортогональных и полных на каждом сечении области. Установлены необходимые для переноса метода Фаэдо – Галеркина на случай нецилиндрических областей вспомогательные утверждения о плотности семейств функций вида $\sum\limits_{i,j} \alpha_{ij} c_i(t)\omega_j(x,t)$. На примере вырождающегося при $\nabla u = 0$ и нелинейного по градиенту уравнения продемонстрировано, какие изменения и обобщения нужно внести в метод монотонности для его успешного применения. Обосновано существование и единственность решения первой начально-краевой задачи для общей нецилиндрической области. Это является основным результатом работы.

1. Описание области

Пусть $\bar{Q}_T = \bigcup\limits_{t\in[0,T]} \{\bar{D}_t \times t\}$. $\bar{B} = \{y \in R^n : |y| \le 1\}$ — замкнутый шар в R^n. $\varphi(x,t) = \left(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n\right)$ — семейство диффеоморфизмов $\bar{D}_t \to \bar{B}$, t — параметр. $\psi(y,t) = \left(\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^n\right)$ — семейство обратных отображений $\bar{B} \to \bar{D}_t \subset R^n$. Будем предполагать, что $\varphi \in C^1(\bar{Q}_T)$, $\nabla_x \varphi^i \in C^1(\bar{Q}_T)$ и в $\bar{Q}_T$ якобиан $I(x,t)$ матрицы элементов $\varphi^i_{x_j}(x,t)$ отличен от нуля. Тогда якобиан $J(y,t)$ обратной матрицы из элементов $\psi^i_{y_j}(y,t)$ не равен нулю в $\bar{B} \times [0,T]$.

Очевидно, $Q_T = \bigcup\limits_{t\in(0,T)} \{D_t \times t\}$ — область и $\bar{Q}_T$ — ее замыкание в R^{n+1}.

2. Построение базисов и полных систем функций

Во всей работе рассматриваются вещественнозначные функции. В этом и следующем пунктах считаем $p \ge \frac{2n}{2+n}$. Тогда $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t) \subset L_2(D_t)$. Для $n = 1$ и 2 считаем $p > 1$. Зафиксируем натуральное s и определим $\tilde{\omega}_j(y)$ как последовательность решений спектральной задачи:

$$(\tilde{\omega}_j, v)_{\overset{\circ}{H}{}^s(B)} = \lambda_j (\tilde{\omega}_j, v)_{L_2(B)} \quad \text{для любого } v \in \overset{\circ}{H}{}^s(B),$$

где λ_j — соответствующие функциям $\tilde{\omega}_j(y)$ собственные значения. $\{\tilde{\omega}_j(y)\}$ — ортогональный базис в $L_2(B)$ и в $\overset{\circ}{H}{}^s(B)$ ([12, с. 23], [9, с. 87]). Ортонормируем его в $L_2(B)$.

Выберем и зафиксируем s таким, что $\overset{\circ}{H}{}^s(B) \subset C^1(\bar{B}) \bigcap C_0(\bar{B})$, индекс 0 у C означает равенство нулю на ∂B. Тогда $\overset{\circ}{H}{}^s(B) \subset \overset{\circ}{W}{}^1_p(B)$.

Лемма 1. *Система функций $\{\tilde{\omega}_j(y)\}$ полна в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_p(B)$.*

Доказательство очевидно и основано на вложениях $\overset{\circ}{H}{}^s(B) \subset \overset{\circ}{W}{}_p^1(B) \subset L_2(B) \subset W_{p'}^{-1}(B) \subset H^{-s}(B)$ и плотности первого.

В дальнейшем двойственность между симметричными пространствами цепочки предыдущих вложений будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Следствие. *Линейные комбинации $\Sigma_1^N c_j \tilde{\omega}_j(y)$, $c_j \in R$ плотны в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(B)$.*

Лемма 2. *Если $\{c_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ полная система функций в $L_p(0,T)$, то система функций $\{c_i(t)\tilde{\omega}_j(y)\}_{i,j=1}^{\infty}$ — полная в $L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(B))$.*

Доказательство проводится стандартным способом с использованием равенства $\left(L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(B))\right)^* = L_{p'}(0,T; W_{p'}^{-1}(B))$ [13, с. 159] и леммы 1.

Следствие. *Линейные комбинации функций $c_i(t)\tilde{\omega}_j(y)$ всюду плотны в пространстве $L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(B))$.*

Замечание 1. *Утверждения лемм 1 и 2 хорошо известны.*

Построим системы, полные в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D_t)$ при каждом $t \in [0,T]$.

Рассмотрим систему функций

$$\omega_j(x,t) \overset{def}{=} \tilde{\omega}_j\Big(\varphi(x,t)\Big)|I|^{\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Очевидно, она ортонормирована в $L_2(D_t)$ и полна в нем. Последнее выводится с помощью замены переменных в соответствующих интегралах, определяющих ортогональность.

Пусть $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D_t)$ – замыкание $C_0^{\infty}(D_t)$ по норме $\|\cdot\|^p_{W_p^1(D_t)} = \|\cdot\|^p_{L_p(D_t)} + \|\nabla_x \cdot\|^p_{L_p(D_t)}$.

Теорема 1. *Для любого фиксированного $t \in [0,T]$ система функций $\{\omega_j(x,t)\}$ переменной x полна в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D_t)$.*

Доказательство. Пусть задана функция переменной x и параметра t $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D_t)$. Достаточно доказать, что $u(x,t)$ можно приблизить линейными комбинациями вида $\sum\limits_{j=1}^{m} c_j(t)\omega_j(x,t)$. Определим $\bar{u}(y,t) = u(\psi(y,t),t)|J|^{\frac{1}{2}}$. В силу следствия леммы 1 $\bar{u}(y,t)$ можно приблизить комбинациями $\sum\limits_{j=1}^{m} c_j(t)\tilde{\omega}_j(y)$ в норме $\overset{\circ}{W}{}_p^1(B)$. Кроме того, имеют место оценки

$$\int\limits_{D_t} \left| u - \sum_{j=1}^{m} c_j(t)\omega_j(x,t) \right|^p dx = \int\limits_{B} \left| u(\psi(y,t),t) - \sum_{j=1}^{m} c_j(t)\tilde{\omega}_j(y)|I|^{\frac{1}{2}} \right|^p |J|\, dy =$$

$$= \int\limits_{B} \left| u(\psi(y,t),t)|J|^{\frac{1}{2}} - \sum_{j=1}^{m} c_j(t)\tilde{\omega}_j(y) \right|^p |J|^{1-\frac{p}{2}} dy \le \mu \int\limits_{B} \left| \bar{u}(y,t) - \sum_{j=1}^{m} c_j(t)\tilde{\omega}_j(y) \right|^p dy,$$

$$\int\limits_{D_t}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u-\sum_{j=1}^{m}c_j\omega_j\right)\right|^p dx=\int\limits_{B}\left|\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}(\bar u|I|^{\frac12}-\sum_{j=1}^{m}c_j\tilde\omega_j|I|^{\frac12})\right)\varphi_{kx_i}\right|^p|J|\,dy\le$$
$$\le(2n)^p\int\limits_B\sum_{k=1}^{m}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial y_k}(\bar u-\sum_{j=1}^{m}c_j\tilde\omega_j)|I|^{\frac12}\right|^p+\left|\frac{\partial}{\partial y_k}(|I|^{\frac12})\right|^p\cdot\left|\bar u-\sum_{j=1}^{m}c_j\tilde\omega_j\right|^p\left|\varphi_{kx_i}\right|^p\right\}|J|\,dy\le$$
$$\le(2n)^p\,M(p)\left\{\int\limits_B\left|\nabla_y(\bar u-\sum_{j=1}^{m}c_j\tilde\omega_j)\right|^p dy+\int\limits_B|\bar u-\sum_{j=1}^{m}c_j\tilde\omega_j|^p\,dy\right\}\le$$
$$\le(2n)^p\,M(p)\left\|\bar u-\sum_{j=1}^{m}c_j\tilde\omega_j\right\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(B)}.$$

Всюду плотность линейных комбинации функций $\omega_j(x,t)$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)$ для любого t эквивалентна полноте $\{\omega_j\}$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)$. Теорема доказана. □

Определим $L_p(t;\overset{\circ}{W}{}^1_p\ (D_t))$ как пространство вещественнозначных функций ϑ переменных (x,t) таких, что $\vartheta(\cdot,t)\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)$ для почти всех $t\in[0,T]$, с конечной нормой $\|\vartheta\|^p_{L_p(t;\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))}\overset{def}{=}\int\limits_0^T\int\limits_{D_t}(|\vartheta|^p+|\nabla_x\vartheta|^p)\,dxdt=\int\limits_0^T\|\vartheta\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)}dt.$

Теорема 2. *Если система $\{c_i(t)\}$ полна в $L_p(0,T)$, то линейные комбинации функций $c_i(t)\omega_j(x,t)$ всюду плотны в $L_p(t;\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Определим пространство $W^{1,1}_{p,p'}(Q_T)$ как замыкание по норме

$$\|v\|_{W^{1,1}_{p,p'}(Q_T)}=\left(\int\limits_0^T\|v\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)}dt\right)^{\frac1p}+\left(\int\limits_0^T\|v_t\|^{p'}_{L_{p'}(D_t)}dt\right)^{\frac{1}{p'}}$$

всех функций v из $C^1(\bar Q_T)$, равных нулю на "боковой" поверхности $S=\bigcup\limits_{t\in[0,T]}\{\partial D_t\times t\}$. Здесь v_t — обобщенная производная в смысле Соболева.

Теорема 3. *Если $c_i(t)$ — произвольные функции из $L_p(0,T)$, для которых $c_i{}'\in L_{p'}(0,T)$, то линейные комбинации функций $c_i(t)\omega_j(x,t)$ всюду плотны в $W^{1,1}_{p,p'}(Q_T)$.*

Доказательство. Исходим из того, что линейные комбинации функций $c_i(t)\tilde\omega_j(y)$ плотны в $W^{1,1}_{p,p'}(B\times(0,T))$, [14]. Поэтому если какая-либо функция $\bar F(y,t)$ принадлежит $W^{1,1}_{p,p'}(B\times(0,T))$, то найдутся α^k_{ij},c_i :

$$\bar F_k(y,t)=\sum_{i,\,j=1}^{k}\alpha^k_{ij}c_i(t)\tilde\omega_j(y)\to\bar F(y,t)\text{ при }k\to\infty\text{ в }L_p(0,T;W^1_p(B)),\qquad(1)$$

$$\bar F_{kt}(y,t)=\sum_{i,\,j=1}^{k}\alpha^k_{ij}c_i{}'(t)\tilde\omega_j(y)\to\bar F_t(y,t)\text{ при }k\to\infty\text{ в }L_{p'}(0,T;L_{p'}(B)).\qquad(2)$$

Пусть $F(x,t) \in W^{1,1}_{p,p'}(Q_T)$. Рассмотрим $\bar F(y,t) = F\,|J|^{\frac12}$. Найдем из (1), (2) соответствующие α^k_{ij}, c_i и обозначим через $F_k = \sum\limits_{i,\,j=1}^{k} \alpha^k_{ij} c_i(t)\omega_j(x,t)$. Из неравенств теорем 1 и 2 получим сходимость F_k к F в пространстве $L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$ при $k \to \infty$.

Докажем, что $F_{kt} \to F_t$ в $L_{p'}(Q_T)$. Действительно,

$$\int\limits_0^T \int\limits_{D_t} \Big| F_t - F_{kt} \Big|^p dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_B \Big| \bar F_t\,|I|^{\frac12} + \bar F\,(|I|^{\frac12})_t - \Big(\sum_{i,\,j=1}^{k} \alpha^k_{ij} c_i(t)\,\tilde\omega_j |I|^{\frac12} \Big)_t \Big|^p |J| dydt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_B \Big| \Big(\bar F_t - \sum_{i,\,j=1}^{k} \alpha^k_{ij} c_i{}'(t)\,\tilde\omega_j(y) \Big) |I|^{\frac12} + \Big(\bar F - \sum_{i,\,j=1}^{k} \alpha^k_{ij} c_i(t)\,\tilde\omega_j(y) \Big) (|I|^{\frac12})_t \Big|^p |J| dydt \le$$

$$\le 2^p \mu_1 \int\limits_0^T \int\limits_B |\bar F_t - \bar F_{kt}|^p\, dydt + 2^p \mu_2 \int\limits_0^T \int\limits_B |\bar F - \bar F_k|^p\, dydt \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

□

Следствие. *Используя формулу замены переменных, выводим, что для любой функции $\varphi \in C^1[0,T]$ и любой функции $u \in L_p(Q_T)$ при $k \to \infty$*

$$\int\limits_0^T \int\limits_{D_t} (F_{kt} u\varphi + F_k u\varphi')\, dxdt \to \int\limits_0^T \int\limits_{D_t} (F_t\, u\, \varphi + F\, u\, \varphi')\, dxdt.$$

Определение. *Назовем "функцию"(и обозначим её u_t), производной по t функции u из пространства $L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$, если для всех $F \in W^{1,1}_{p,p'}(Q_T)$ и $\varphi \in C^\infty_0(0,T)$ выполнено тождество*

$$\int\limits_0^T \langle u_t, F\rangle \varphi(t)\, dt \overset{def}{=} -\int\limits_0^T \Big(\int\limits_{D_t} uF\, dx \Big) \varphi'(t)\, dt - \int\limits_0^T \int\limits_{D_t} F_t\, u\, \varphi(t)\, dxdt.$$

В силу плотности вложений цепочки из леммы 1 с помощью предельного перехода можно считать, что в данном определении $F \in L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p\,(D_t))$, а $F_t \in L_{p'}(t; W^{-1}_{p'}(D_t))$. При этом последнее слагаемое надо записать в виде $\int\limits_0^T \langle F_t, u\rangle \varphi\, dt$ и учесть, что $u \in L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$.

Определим пространство $H(Q_T)$ как замыкание по норме

$$\|\cdot\|_{H(Q_T)} = \Big(\int\limits_0^T \|\cdot\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)} dt \Big)^{\frac1p} + \Big(\int\limits_0^T \|\frac{\partial}{\partial t} \cdot\|^{p'}_{W^{-1}_{p'}(D_t)} dt \Big)^{\frac{1}{p'}}$$

множества функций из $C^1(\bar Q_T)$, равных нулю на "боковой" поверхности S.

Теорема 4. *Вложение* $W^{1,1}_{p,p'}(Q_T) \subset H(Q_T)$ *плотно.*

Доказательство. Как включение множеств это следует из цепочки включений леммы 1. Из определения $H(Q_T)$ следует, что для любого u из $H(Q_T)$ и заданного n найдется элемент $u_m \in C^1(\bar{Q}_T)$, $u_m|_S = 0$, такой, что $\|u - u_m\|_{H(Q_T)} \le \frac{1}{n}$. Так как $u_m \in W^{1,1}_{p,p'}(Q_T)$, то по теореме 3 найдется $F_{k(n)}$ такое, что

$$\left(\int\limits_0^T \|u_m - F_{k(n)}\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)} dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_0^T \|u_{mt} - F_{k(n)t}\|^{p'}_{L_{p'}(D_t)} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \le \frac{1}{n}.$$

А так как

$$\int\limits_0^T \|u_{mt} - F_{k(n)t}\|^{p'}_{W^{-1}_{p'}(D_t)} dt \le \int\limits_0^T \|u_{mt} - F_{k(n)t}\|^{p'}_{L_{p'}(D_t)} dt,$$

то $\|u_m - F_{k(n)}\|_{H(Q_T)} \le \frac{1}{n}$. Следовательно, $\|u - F_{k(n)}\|_{H(Q_T)} \le \frac{2}{n}$. □

3. Леммы о дифференцировании по параметру t интегралов по сечениям

Лемма 3. *Пусть функция* $f_1(x,t) \in C^1(\bar{Q}_T)$ *и* $f_1(x,t) = 0$ *на боковой поверхности* S. *Определим множество* $D = \bigcup\limits_{t \in (0,T)} D_t$. *Пусть замыкание* $\bar{D} \subset \tilde{D}$, *где* $\tilde{D}$ *— некоторая область. Определим функцию переменной* x $\bar{f}_1(x,t) = f_1(x,t)$ *для* $x \in D_t$ *и* $\bar{f}_1(x,t) = 0$ *для* $x \in \tilde{D} \backslash D_t$. *Тогда 1)* $\bar{f}_1(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\tilde{D})$ *для любого* $t \in [0,T]$; *2)* $\bar{f}_1(x,t) \in W^1_p(\tilde{D} \times (0,T))$; *3)* $\frac{d}{dt} \int\limits_{D_t} f_1(x,t)\, dx = \int\limits_{D_t} f_{1t}(x,t)\, dx$.

Доказательство. 1) следует из леммы [15, с. 49]. 2) следует из определения обобщенной производной и ее оценки как функционала на $L_p(\tilde{D} \times (0,T))$. 3) следует из 2) и аналогичной 3) формулы для случая, когда область интегрирования по переменной x не зависит от t. Детали доказательства можно найти в [16, с. 11]. □

Лемма 4. *Пусть* $u, F \in H(Q_T)$. *Тогда* $\langle F, u\rangle = \int\limits_{D_t} Fu\, dx$ *имеет суммируемую производную по* t, *функция* $\int\limits_{D_t} Fu\, dx$ *непрерывна по* t *и справедлива формула*

$$\frac{d}{dt}\langle F, u\rangle = \langle F_t, u\rangle + \langle u_t, F\rangle. \tag{3}$$

Доказательство, приведенное в [16, с. 31], основано на предыдущих теоремах о плотности, свойстве 3) леммы 3 и предельном переходе в выражениях типа $\int\limits_0^T \langle\cdot,\cdot\rangle\varphi(t)dt$ и $\int\limits_0^T \langle\cdot,\cdot\rangle\varphi'(t)dt$.

4. Постановка задачи и формулировка результата

В нецилиндрической области Q_T требуется найти решение $u = u(x,t)$ уравнения

$$u_t(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a(u_{x_i}(x,t)) = f(x,t), \tag{4}$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям на "боковой" поверхности $S = \bigcup\limits_{t\in[0,T]} \{\partial D_t \times t\}$ и начальному условию при $t = 0$.

Функция $a(\xi)$ определена и непрерывна на R и удовлетворяет:

I. *Условию монотонности.* $a(\xi)$ – не убывает.

II. *Условию на рост.* $|a(\xi)| \le c_1 |\xi|^{p-1} + c_2,\ p > 1$.

III. *Условию эллиптичности.* $a(\xi)\cdot\xi \ge \nu|\xi|^p - \mu$, где $\nu > 0,\ \mu \ge 0$.

Условия на входные данные. Функция $u_0(x) \in L_2(D_0)$. $\|f\|_{L_2(D_t)} \in L_\infty(0,T)$ и для каждой $g \in C^1(\bar{Q}_T)$ функция $\int\limits_{D_t} f(x,t)\, g(x,t)\, dx$ непрерывна на $[0,T]$.

Определение. *Функция* $u \in L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$, *такая, что* $vrai\max\limits_{t\in[0,T]} \|u\|_{L_2(D_t)} < \infty$, *называется обобщенным решением задачи, если для любой функции* $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ *и любой функции* $F \in C^1(\bar{Q}_T)$, *обращающейся в нуль на* S, *выполнено интегральное тождество*

$$-\int_0^T\Big(\int_{D_t} uF\,dx\Big)\varphi' dt - \int_0^T\int_{D_t} uF_t\varphi\,dxdt + \int_0^T\Big(\int_{D_t}\sum_{i=1}^n a(u_{x_i})F_{x_i}\,dx\Big)\varphi\,dt = \int_0^T\int_{D_t} fF\varphi\,dxdt, \tag{5}$$

а для любых $\omega_j(x,t)$, *построенных в пункте 2, выполнено условие*

$$\int_{D_t} u(x,t)\omega_j(x,t)\,dx \to \int_{D_0} u_0(x)\omega_j(x,0)\,dx \quad \text{при } t \to 0. \tag{6}$$

Теорема 5. *При указанных выше на функции* a, u_0, f *предположениях уравнение (4) имеет обобщенное решение* $u(x,t)$, *причем функция* $\langle u(\cdot,t), F(\cdot,t)\rangle$ *непрерывна по* $t \in [0,T]$ *для любой функции* F *из* $C^1(\bar{Q}_T)$, *обращающейся в нуль на* S.

В силу отсутствия суммируемых следов при $t = const$ у обобщенного решения из теоремы 5 и нестандартного требования выполнения начального условия, требуется обосновать, что в указанном классе сохраняется единственность решения.

Теорема 6. *При выполнении условиий теоремы 5 в классе функций* $H(Q_T)$ *может существовать не более одного решения задачи.*

Доказательство теоремы 6 изложено в работе [17]. Она гарантирует обоснованность замены наличия суммируемого следа при $t = const$ у решения на его наличие у интегралов по сечениям (они, после изменения на множестве меры 0, оказываются просто непрерывными по t функциями), а также замены выполнения начального условия в смысле следов требованием (6).

5. Построение и оценка приближенного решения

Приближенное решение $u_m = u_m(x,t)$ задачи будем искать в виде $u_m(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k{}^m(t)\,\omega_k(x,t)$, исходя из требования

$$\langle u_{mt}, \omega_j\rangle + \langle A(t)u_m, \omega_j\rangle \;=\; \langle f, \omega_j\rangle, \quad j = 1, ..., m \tag{7}$$

и условия $c_j{}^m(0) = c_j$, где $c_j = \int\limits_{D_0} u_0(x)\omega_j(x,0)\,dx$. Здесь оператор

$$A(t)u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a(u_{x_i}), \qquad A(t)\colon \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t) \to W^{-1}_{p'}(D_t).$$

Существование глобального решения $\vec{c}(t) = (c_1{}^m(t), ..., c_m{}^m(t))$ системы (7) из класса $W_2^1(0,T)$ следует из леммы Вишика – Дубинского [14, с. 67], обобщение которой на случай неоднородных начальных условий можно найти в [16, с. 8], а на случай не непрерывных суммируемых коэффициентов (конкретно в данной работе на случай f из $L_2(Q_T)$) — в [18].

Из (7) нетрудно получить

$$\langle u_{mt}, u_m\rangle + \langle A(t)u_m, u_m\rangle \;=\; \langle f, u_m\rangle. \tag{8}$$

Первое слагаемое в (8) по лемме 3 можно представить в виде

$$\langle u_{mt}, u_m\rangle = \int\limits_{D_t} u_{mt}u_m\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|^2_{L_2(D_t)}.$$

Применив ко второму слагаемому согласованность из доказательства леммы 1 и условие III, получим $\langle A(t)u_m, u_m\rangle \geq \nu c\|\nabla_x u_m\|^p_{L_p(D_t)} - n\mu\,|D_t|$.

Оценив правую часть (8) $|\langle f, u_m\rangle| \leq \frac{1}{2}\operatorname*{vrai\,max}\limits_{t\in[0,T]}\|f\|^2_{L_2(D_t)} + \frac{1}{2}\|u_m\|^2_{L_2(D_t)}$ и использовав неравенство Гронуолла, получим

$$\|u_m\|^2_{L_2(D_t)} + c_0\int\limits_0^t \|\nabla_x u_m\|^p_{L_p(D_\tau)}d\tau \leq \Big(\|u_m(x,0)\|^2_{L_2(D_0)} + M_1 t - M_1\Big)e^t + M_1(1+t).$$

Так как $c_j{}^m(0) = c_j$, то $\|u_m(x,0)\|^2 \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j{}^2 = \|u_0(x)\|^2$. Поэтому, найдётся не зависящая от n постоянная $c(T)$, такая, что

$$\|u_m\|^2_{L_2(D_t)} + c_0\int\limits_0^t \|\nabla_x u_m\|^p_{L_p(D_\tau)}\,d\tau \leq c(T), \tag{9}$$

в частности, $\|u_m\|^2_{L_{\tilde{p}}(D_t)} \leq \tilde{c}(T)$ для любого $1 \leq \tilde{p} \leq 2$.

Для оценки u_m в $L_p(Q_T)$, $p > 2$ воспользуемся мультипликативным неравенством [19, с. 78] $\|u_m\|_{L_p(D_t)} \leq \beta \|\nabla_x u_m\|^{\alpha}_{L_p(D_t)} \|u_m\|^{1-\alpha}_{L_2(D_t)}$, $\alpha \in (0,1)$, неравенством Юнга, оценкой (9). Интегрируя по t, получим

$$\|u_m\|^p_{L_p(Q_T)} \leq \beta^p \left(\alpha \int\limits_0^T \|\nabla_x u_m\|^p_{L_p(D_t)}\, dt + M_2\, T \right) \leq M_3. \tag{10}$$

6. Предельный переход

Очевидно, что оператор $A(t)\colon \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t) \to W^{-1}_{p'}(D_t)$ монотонный, семинепрерывный для всех $t \in [0,T]$ и ограниченный. Точнее, существуют, причем не зависящие от t константы c_3, c_4, такие, что

$$\|A(t)u\|_{W^{-1}_{p'}(D_t)} \leq c_3 \|\nabla_x u\|^{p-1}_{L_p(D_t)} + c_4. \tag{11}$$

Лемма 5. *Из построенной выше последовательности* $\{u_m\}$ *можно извлечь подпоследовательность, снова обозначаемую* $\{u_m\}$, *такую, что для некоторых элементов* $u, u_{x_i} \in L_p(Q_T)$, $\chi_i \in L_{p'}(Q_T)\,(i = 1,...,n)$, $\chi \in \left(L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))\right)^*$ *и* $\zeta \in L_2(D_T)$ *справедливы следующие предельные соотношения при* $m \to \infty$:

$$u_m \to u \ \textit{слабо в} \ L_p(Q_T), \tag{12}$$

$$u_{mx_i} \to u_{x_i} \ \textit{слабо в} \ L_p(Q_T), \tag{13}$$

$$a(u_{mx_i}) \to \chi_i \ \textit{слабо в} \ L_{p'}(Q_T), \tag{14}$$

$$A(t)u_m \to \chi \ \textit{слабо в} \ \left(L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))\right)^*, \tag{15}$$

$$u_m(x,T) \to \zeta(x) \ \textit{слабо в} \ L_2(D_T). \tag{16}$$

Доказательство. Из оценки (9) и условия II на рост функции a выводится равномерная оценка

$$\|a(u_{mx_i})\|^{p'}_{L_{p'}(Q_T)} \leq c_5. \tag{17}$$

Оценки (9), (10), (17) дают возможность из последовательности $\{u_m\}$ извлечь подпоследовательность, снова обозначаемую через $\{u_m\}$, такую, что (12)–(14), (16) выполнены. Очевидно, $u \in L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$.

Для обоснования (15) воспользуемся (11) и неравенством Гельдера: для любой $\vartheta \in L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$

$$|\langle\langle A(t)u_m, \vartheta \rangle\rangle| \overset{def}{=} \left| \int\limits_0^T \langle A(t)u_m, \vartheta \rangle\, dt \right| \leq \left(\int\limits_0^T \|A(t)u_m\|^{p'}_{W^{-1}_{p'}(D_t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_0^T \|\vartheta\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_0^T 2^{p'} ({c_3}^{p'} \|\nabla_x u_m\|^p_{L_p(D_t)} + {c_4}^{p'})\, dt \right)^{\frac{1}{p'}} \|\vartheta\|_{L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))} \leq c_6\, \|\vartheta\|_{L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))}.$$

Учитывая сепарабельность $L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$, применяя теорему 3 из [20, с. 199], получаем сходимость (15).

Очевидно, что в смысле распределений выполнено равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\chi_i = -\chi$.

Используем эти факты для обоснования предельного перехода в интегральном тождестве. Умножим (7) на произвольные $\alpha_{ij}\, b_i(t)$, где $b_i(t) \in C^1[0,T]$, и просуммируем по i и j от 1 до k, обозначая $F_k = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} b_i(t)\omega_j(x,t)$. Получим тождество $\langle u_{mt}, F_k\rangle + \langle A(t)u_m, F_k\rangle = \langle f, F_k\rangle$. Очевидно, что $F_k \in C^1(\bar{Q}_T)$, $F_k = 0$ на S.

Умножая последнее тождество на $\varphi(t) \in C^1[0,T]$, интегрируя по t от 0 до T и используя свойство 3 леммы 3, получаем, интегрируя по частям,

$$-\int\limits_0^T\Big(\int\limits_{D_t} u_m F_k dx\Big)\varphi'(t)dt - \int\limits_0^T\Big(\int\limits_{D_t} u_m F_{kt} dx\Big)\varphi(t)dt + \int\limits_0^T\Big(\int\limits_{D_t}\sum_{i=1}^{n} a(u_{mx_i})F_{kx_i}dx\Big)\varphi(t)dt +$$
$$+\int\limits_{D_T} u_m(x,T)F_k(x,T)\varphi(T)dx - \int\limits_{D_0} u_m(x,0)F_k(x,0)\varphi(0)dx = \int\limits_0^T\int\limits_{D_t} fF_k\varphi(t)\,dxdt.$$

Перейдем к пределу по $m \to \infty$, воспользовавшись (12)–(16).

$$\begin{gathered}-\int\limits_0^T\Big(\int\limits_{D_t} uF_k\,dx\Big)\varphi'(t)\,dt - \int\limits_0^T\Big(\int\limits_{D_t} uF_{kt}\,dx\Big)\varphi(t)\,dt + \int\limits_0^T\Big(\int\limits_{D_t}\sum_{i=1}^{n}\chi_i F_{kx_i}\,dx\Big)\varphi(t)\,dt + \\ + \int\limits_{D_T}\zeta(x)F_k(x,T)\varphi(T)dx - \int\limits_{D_0} u_0(x)F_k(x,0)\varphi(0)dx = \int\limits_0^T\int\limits_{D_t} fF_k\varphi(t)dxdt\end{gathered} \tag{18}$$

для любой $\varphi \in C^1[0,T]$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$, тогда в (18) не будет слагаемых с интегралами по D_T и D_0.

Поэтому, после изменения на множестве нулевой меры, $\Phi_k(t) \overset{def}{=} \int\limits_{D_t} uF_k\,dx$ имеет производную по t из $L_{p'}(0,T)$. Следовательно, можно считать, что $\Phi_k(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и имеет след при $t=0$ и $t=T$. Здесь мы используем термин *след*, а не *значение* при $t = const$, поскольку до изменения на множестве нулевой меры величины $\Phi_k(t)$ могут не быть непрерывными и определёнными всюду.

Интегрируя по частям в (18), получим:
$$\int\limits_0^T\Big(\frac{d}{dt}(\int\limits_{D_t} uF_k\,dx)\Big)\varphi\,dt - \int\limits_0^T(\int\limits_{D_t} uF_{kt}\,dx)\varphi\,dt + \int\limits_0^T(\int\limits_{D_t}\sum_{i=1}^{n}\chi_i F_{kx_i}\,dx)\varphi\,dt = \int\limits_0^T\int\limits_{D_t} fF_k\varphi\,dxdt.$$

В силу плотности $C_0^\infty(0,T)$ в $L_p(0,T)$ последнее равенство можно замкнуть на все φ из $L_p(0,T)$. После этого снова возьмем $\varphi \in C^1[0,T]$. Тогда

$$-\int_0^T\Big(\int_{D_t} uF_k\,dx\Big)\varphi'(t)\,dt + \Phi_k(T)\varphi(T) - \Phi_k(0)\varphi(0) - \int_0^T\Big(\int_{D_t} uF_{kt}\,dx\Big)\varphi(t)\,dt +$$
$$+\int_0^T\Big(\int_{D_t}\sum_{i=1}^n \chi_i F_{kx_i}\,dx\Big)\varphi(t)\,dt = \int_0^T\int_{D_t} fF_k\varphi(t)\,dxdt.$$

Сравнивая это тождество с (18), получаем

$$\Phi_k(T)\varphi(T) - \Phi_k(0)\varphi(0) = \int_{D_T}\zeta(x)F_k(x,T)\varphi(T)dx - \int_{D_0} u_0(x)F_k(x,0)\varphi(0)dx.$$

Учитывая произвольность $\varphi \in C^1[0,T]$, приходим к следующим равенствам для любого k:

$$\Big(\int_{D_t} uF_k\,dx\Big)\Big|_{t=T} = \int_{D_T}\zeta(x)F_k(x,T)\,dx, \tag{19}$$

$$\Big(\int_{D_t} uF_k\,dx\Big)\Big|_{t=0} = \int_{D_0} u_0(x)F_k(x,0)\,dx. \tag{20}$$

Выберем $F_k = \omega_k(x,t)$. Воспользовавшись непрерывностью $\int\limits_{D_t} u\omega_k\,dx$ из соотношения (20), получаем для любого k при $t \to 0$

$$\int_{D_t} u\omega_k\,dx \to \Big(\int_{D_t} u\omega_k\,dx\Big)\Big|_{t=0} = \int_{D_0} u_0(x)\omega_k(x,0)\,dx.$$

Выполнение условия (6) обосновано.

7. О производной по t. Обоснование равенства $\chi = A(t)u$

Пусть $F \in W^{1,1}_{p,p'}(Q_T)$. В силу теоремы 3 о плотности можно подобрать $\{F_k\}$ так, чтобы $F_k \to F$ в $L_p(t;\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$ и $F_{kt} \to F_t$ в $L_{p'}(Q_T)$. Тогда, учитывая следствие к теореме 3, при $k \to \infty$ из (18) получаем $\forall\,\varphi \in C_0^\infty(0,T)$

$$\begin{gathered}-\int_0^T\Big(\int_{D_t} uF\,dx\Big)\varphi'(t)\,dt - \int_0^T\Big(\int_{D_t} uF_t\,dx\Big)\varphi(t)\,dt + \int_0^T\Big(\int_{D_t}\sum_{i=1}^n \chi_i F_{x_i}\,dx\Big)\varphi(t)\,dt = \\ = \int_0^T\int_{D_t} fF\varphi(t)\,dxdt.\end{gathered} \tag{21}$$

Если u удовлетворяет (21), то в силу приведённого ранее определения производной по t функции u из пространства $L_p(t;\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$, получим

$$\int\limits_0^T \langle u_t, F\rangle\varphi(t)\,dt = \int\limits_0^T \langle f, F\rangle\varphi(t)\,dt - \int\limits_0^T \Bigl(\sum_{i=1}^n \int\limits_{D_t} \chi_i F_{x_i}\,dx\Bigr)\varphi(t)\,dt.$$

По лемме дю-Буа-Реймонда [15, с. 10] почти всюду на $(0,T)$

$$\langle u_t, F\rangle = \langle f, F\rangle - \sum_{i=1}^n \int\limits_{D_t} \chi_i F_{x_i}\,dx = \langle f, F\rangle - \langle \chi, F\rangle.$$

Очевидно, для почти всех t $u_t \in W^{-1}_{p'}(D_t)$. При этом

$$\int\limits_0^T |\langle u_t, F\rangle|^p\,dt \le c_{10}\int\limits_0^T \|F\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)}\,dt.$$

Эти два условия будем записывать в виде $u_t \in L_{p'}(t;W^{-1}_{p'}(D_t))$.

Теперь, в силу утверждения теоремы 4 о плотности можно замкнуть тождество (21) на класс функций $F \in H(Q_T)$. Взяв $F = u$, получим для любой $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$

$$-\int\limits_0^T\left(\int\limits_{D_t} u^2\,dx\right)\varphi'(t)\,dt - \int\limits_0^T\langle u_t, u\rangle\varphi(t)\,dt + \int\limits_0^T\left(\int\limits_{D_t}\sum_{i=1}^n \chi_i u_{x_i}\,dx\right)\varphi(t)\,dt = \int\limits_0^T \langle f, u\rangle\varphi(t)\,dt.$$

С другой стороны, опять используя определение производной по t, как распределения,получим

$$\int\limits_0^T\langle u_t, u\rangle\varphi(t)\,dt + \int\limits_0^T\Bigl(\int\limits_{D_t}\sum_{i=1}^n \chi_i u_{x_i}\,dx\Bigr)\varphi(t)\,dt = \int\limits_0^T\langle f, u\rangle\varphi(t)\,dt, \tag{22}$$

т.е. $2\int\limits_0^T\langle u_t, u\rangle\varphi(t)\,dt = -\int\limits_0^T(\int\limits_{D_t} u^2\,dx)\varphi'(t)\,dt.$

Поэтому,

$$\langle u_t, u\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{D_t} u^2\,dx. \tag{23}$$

Из (22) следует, что $\int\limits_{D_t} u^2\,dx$ имеет производную из $L_1(0,T)$. Значит, можно считать, что функция $\int\limits_{D_t} u^2\,dx$ непрерывна и имеет след при $t = 0$. Равенство (23) и факт непрерывности следуют также из леммы 4. Из нее же получаем, что величины $\int\limits_{D_t}(u - F_k)^2\,dx$ и $\int\limits_{D_t}(u - F)^2\,dx$ непрерывны по t и имеют след при $t = 0$. Докажем, что следы сходятся.

Лемма 6. *Если* $u \in H(Q_T)$ *и* $F_k \to F$ *в* $H(Q_T)$, *то при* $k \to \infty$

$$\left(\int\limits_{D_t} (u - F_k)^2\, dx\right)\Bigg|_{t=0} \to \left(\int\limits_{D_t} (u - F)^2\, dx\right)\Bigg|_{t=0}.$$

Доказательство. По построению F_k имеем при $k \to \infty$ для любой $\varphi \in C^1[0,T]$

$$\int\limits_0^T \langle F_{kt}, u\rangle \varphi(t)\, dt + \int\limits_0^T \langle u_t, F_k\rangle \varphi(t)\, dt \to \int\limits_0^T \langle F_t, u\rangle \varphi(t)\, dt + \int\limits_0^T \langle u_t, F\rangle \varphi(t)\, dt.$$

Используя формулу (3) получим, что $\int\limits_0^T \frac{d}{dt}\langle F_k, u\rangle \varphi(t)\, dt \to \int\limits_0^T \frac{d}{dt}\langle F, u\rangle \varphi(t)\, dt$ при $k \to \infty$, следовательно,

$$-\int\limits_0^T \langle F_k, u\rangle \varphi'(t)\, dt + \langle F_k, u\rangle \varphi(t)\Big|_0^T \to -\int\limits_0^T \langle F, u\rangle \varphi'(t)\, dt + \langle F, u\rangle \varphi(t)\Big|_0^T.$$

Однако первое слагаемое левой части сходится при $k \to \infty$ к первому слагаемому правой части. Поэтому, выбирая $\varphi(0) = 1$, $\varphi(T) = 0$, получим, что при $k \to \infty$

$$\langle F_k, u\rangle\Big|_{t=0} = \left(\int\limits_{D_t} F_k u\, dx\right)\Bigg|_{t=0} \to \left(\int\limits_{D_t} F u\, dx\right)\Bigg|_{t=0}. \tag{24}$$

Аналогично предыдущему получаем $\int\limits_0^T \langle F_{kt}, F_k\rangle \varphi(t)\, dt \to \int\limits_0^T \langle F_t, F\rangle \varphi(t)\, dt$ при $k \to \infty$, то есть

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^T\left(\int\limits_{D_t} {F_k}^2 dx\right)\varphi'(t)dt + \frac{1}{2}\left(\int\limits_{D_t} {F_k}^2 dx\right)\varphi(t)\Bigg|_0^T \to -\frac{1}{2}\int\limits_0^T\left(\int\limits_{D_t} F^2 dx\right)\varphi'(t)dt + \frac{1}{2}\left(\int\limits_{D_t} F^2 dx\right)\varphi(t)\Bigg|_0^T.$$

В силу сходимости F_k к F в $L_p(t; L_2(D_t))$ $\left(H(Q_T) \subset L_p(t; \overset{\circ}{W}{}_p^1 (D_t)) \subset L_p(Q_T) \subset L_p(t; L_2(D_t))\right)$ получаем при $k \to \infty$

$$\left(\int\limits_{D_t} {F_k}^2\, dx\right)\Bigg|_{t=0} \to \left(\int\limits_{D_t} F^2\, dx\right)\Bigg|_{t=0}. \tag{25}$$

Из (24) и (25) выводим то, что и требовалось доказать:

$$\left(\int\limits_{D_t} (u - F_k)^2\, dx\right)\Bigg|_{t=0} = \left(\int\limits_{D_t} u^2\, dx\right)\Bigg|_{t=0} - 2\left(\int\limits_{D_t} uF_k\, dx\right)\Bigg|_{t=0} + \left(\int\limits_{D_t} {F_k}^2\, dx\right)\Bigg|_{t=0} \to$$

$$\to \left(\int\limits_{D_t} u^2\, dx\right)\Bigg|_{t=0} - 2\left(\int\limits_{D_t} uF\, dx\right)\Bigg|_{t=0} + \left(\int\limits_{D_t} F^2\, dx\right)\Bigg|_{t=0} = \left(\int\limits_{D_t} (u - F)^2\, dx\right)\Bigg|_{t=0}.$$

Лемма 7. *Возьмем* $F_k = \sum\limits_{j,i=1}^{k} c_i(t)\omega_j(x,t)$, $c_i(t) \in W^1_{p'}(0,T)$. *Тогда для предельной функции* $u(x,t)$ *выполнено неравенство*

$$\int\limits_{D_0} (u_0(x) - F_k(x,0))^2\,dx \le \left(\int\limits_{D_t} (u(x,t) - F_k(x,t))^2\,dx\right)\Bigg|_{t=0}. \tag{26}$$

Доказательство. Прежде докажем неравенство

$$\int\limits_{D_0} {u_0}^2(x)\,dx \le \left(\int\limits_{D_t} u^2(x,t)\,dx\right)\Bigg|_{t=0}.$$

Для этого сначала выберем такие F_k, что $F_k(x,0) \to u_0(x)$ в $L_2(D_0)$. Например, можно взять $F_k = u_k$. Из (20) получаем

$$\int\limits_{D_0} u_0(x)F_k(x,0)\,dx = \left(\int\limits_{D_t} uF_k\,dx\right)\Bigg|_{t=0} \le \left(\left(\int\limits_{D_t} u^2(x,t)\,dx\right)^{\frac12}\left(\int\limits_{D_t} {F_k}^2(x,t)\,dx\right)^{\frac12}\right)\Bigg|_{t=0} =$$
$$= \left(\int\limits_{D_t} u^2(x,t)\,dx\right)^{\frac12}\Bigg|_{t=0}\left(\int\limits_{D_t} {F_k}^2(x,t)\,dx\right)^{\frac12}\Bigg|_{t=0} = \left(\int\limits_{D_t} u^2(x,t)\,dx\right)^{\frac12}\Bigg|_{t=0}\left(\int\limits_{D_0} {F_k}^2(x,0)\,dx\right)^{\frac12}.$$

В полученном неравенстве переходим к пределу при $k \to \infty$:

$$\int\limits_{D_0} {u_0}^2(x)\,dx \le \left(\int\limits_{D_t} u^2(x,t)\,dx\right)^{\frac12}\Bigg|_{t=0}\left(\int\limits_{D_0} {u_0}^2(x)\,dx\right)^{\frac12}$$

или

$$\int\limits_{D_0} {u_0}^2(x)\,dx \le \left(\int\limits_{D_t} u^2(x,t)\,dx\right)\Bigg|_{t=0}.$$

Теперь вернемся к произвольным F_k. Используя последнее неравенство и (20), получим $\int\limits_{D_0} (u_0(x) - F_k(x,0))^2\,dx \le \left(\int\limits_{D_t} (u(x,t) - F_k(x,t))^2\,dx\right)\Bigg|_{t=0}$. Лемма доказана.

Докажем, что $\chi = A(t)u$. Пусть далее $F_k(x,t) = \sum\limits_{i,\,j=1}^{k} \alpha_{ij} b_i(t)\omega_j(x,t)$, $k \le m$. Тогда

$$\int\limits_0^T \langle u_{mt} - F_{kt}, u_m - F_k\rangle dt = \frac12\int\limits_0^T \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{D_t} (u_m - F_k)^2\,dx\right)dt =$$
$$= \frac12\left(\int\limits_{D_t} (u_m - F_k)^2\,dx\right)\Bigg|_{t=T} - \frac12\int\limits_{D_0} (u_m(x,0) - F_k(x,0))^2\,dx \ge$$
$$\ge -\frac12\int\limits_{D_0} (u_m(x,0) - F_k(x,0))^2\,dx.$$

Складывая это неравенство с неравенством монотонности

$$\int_0^T \langle A(t)u_m - A(t)F_k, u_m - F_k\rangle dt \geq 0, \qquad u_m, F_k \in L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)),$$

выводим

$$\int_0^T \langle u_{mt}, u_m - F_k\rangle dt - \int_0^T \langle F_{kt}, u_m - F_k\rangle dt + \int_0^T \langle A(t)u_m, u_m - F_k\rangle dt -$$
$$- \int_0^T \langle A(t)F_k, u_m - F_k\rangle dt \geq -\frac{1}{2}\int_{D_0} (u_m(x,0) - F_k(x,0))^2\, dx.$$

Так как $k \leq m$, из (7) нетрудно получить тождество

$$\langle u_{mt}, u_m - F_k\rangle = \langle f, u_m - F_k\rangle - \langle A(t)u_m, u_m - F_k\rangle.$$

Интегрируя его по t и подставляя в предыдущее неравенство, получим

$$\int_0^T \langle f, u_m - F_k\rangle dt - \int_0^T \langle F_{kt}, u_m - F_k\rangle dt - \int_0^T \langle A(t)F_k, u_m - F_k\rangle dt \geq$$
$$\geq -\frac{1}{2}\int_{D_0} (u_m(x,0) - F_k(x,0))^2\, dx.$$

Перейдем к пределу при $m \to \infty$:

$$\int_0^T \langle f, u - F_k\rangle dt - \int_0^T \langle F_{kt}, u - F_k\rangle dt - \int_0^T \langle A(t)F_k, u - F_k\rangle dt \geq -\frac{1}{2}\int_{D_0} (u_0(x) - F_k(x,0))^2\, dx.$$

Воспользуемся полученным равенством $\langle u_t, F\rangle = \langle f, F\rangle - \langle \chi, F\rangle$ при $F = u - F_k$. Тогда $\int_0^T \langle f, u - F_k\rangle dt = \int_0^T \langle u_t, u - F_k\rangle dt + \int_0^T \langle \chi, u - F_k\rangle dt$ и предыдущее неравенство примет вид

$$\int_0^T \langle u_t, u - F_k\rangle dt + \int_0^T \langle \chi, u - F_k\rangle dt - \int_0^T \langle F_{kt}, u - F_k\rangle dt - \int_0^T \langle A(t)F_k, u - F_k\rangle dt \geq$$
$$\geq -\frac{1}{2}\int_{D_0} (u_0(x) - F_k(x,0))^2\, dx$$

или, с учетом неравенства (26) леммы 7,

$$\begin{gathered}\int_0^T \langle u_t - F_{kt}, u - F_k\rangle dt + \int_0^T \langle \chi - A(t)F_k, u - F_k\rangle dt \geq \\ \geq -\frac{1}{2}\int_{D_0} (u_0(x) - F_k(x,0))^2\, dx \geq -\frac{1}{2}\left(\int_{D_t} (u(x,t) - F_k(x,t))^2\, dx\right)\Bigg|_{t=0}.\end{gathered} \tag{27}$$

В силу плотности F_k в $H(Q_T)$ (теоремы 3 и 4), последнее неравенство можно замкнуть на все $F \in H(Q_T)$. Например, сходимость $\int\limits_0^T \langle F_{kt}, F_k\rangle dt \to \int\limits_0^T \langle F_t, F\rangle dt$ при $k \to \infty$ устанавливается так же, как в лемме 6. В ней же обосновано замыкание правой части неравенства (27).

Итак, замыкая (27), получим

$$\int\limits_0^T \langle u_t - F_t, u - F\rangle dt + \int\limits_0^T \langle \chi - A(t)F, u - F\rangle dt \geq -\frac{1}{2}\left(\int\limits_{D_t} (u-F)^2\,dx\right)\Bigg|_{t=0}.$$

Выберем $F = u - \lambda w$, где $\lambda = const$, а $w \in H(Q_T)$ – произвольно. Тогда

$$\int\limits_0^T \langle \lambda w_t, \lambda w\rangle dt + \int\limits_0^T \langle \chi - A(t)(u - \lambda w), \lambda w\rangle dt \geq -\frac{1}{2}\left(\int\limits_{D_t} \lambda^2 w^2\,dx\right)\Bigg|_{t=0}.$$

Разделим обе части этого неравенства на $\lambda > 0$ и устремим $\lambda \to +0$. В силу семинепрерывности $A(t)$ получаем $\int\limits_0^T \langle \chi - A(t)u, w\rangle dt \geq 0$. Отсюда стандартным образом выводим $\int\limits_0^T \langle \chi - A(t)u, w\rangle dt = 0$ для любого $w \in H(Q_T)$. Взяв $w = b(t)\,w_j$ с произвольной $b(t)$ из $C^1[0,T]$, получаем $\langle \chi - A(t)u, w_j\rangle = 0$ почти всюду на $[0,T]$. Следовательно, $\chi - A(t)u = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Gevrey, “Les equations paraboliques”, *J. de Math.*, **9.** (1913), 187–235.

[2] I. G. Petrowsky, “Zur ersten Randwertaufgabe der Warmeleitungsgleichung”, *Compositio math*, **1** (1935), 389–419.

[3] В. П. Михайлов, “О задаче Дирихле и первой смешанной задаче для параболического уравнения”, *Докл. АН СССР*, **140**:2 (1961), 303–306.

[4] В. П. Михайлов, “О задаче Дирихле для параболического уравнения”, *Мат. сборник*, **61(103)**:1 (1963), 40–64.

[5] С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев, “Абстрактная схема рассмотрения параболических задач в нецилиндрических областях”, *Дифференциальные уравнения*, **5**:8 (1969), 1458–1469.

[6] R. Benabidallah, J. Ferreira, “On hyperbolic – parabolic equations with nonlinearity of Kirchhoff – Carrier type in domains with moving boundary”, *Nonlinear Analysis*, **37** (1999), 269–287.

[7] J. Ferreira, N. A. Lar’kin, “Global solvability of a mixed problem for a nonlinear hyperbolic – parabolic equation in noncylindrical domains”, *Portugaliae Mathematica*, **53**:4 (1996), 381–395.

[8] П. В. Виноградова, А. Г. Зарубин, “О методе Галеркина для квазилинейных параболических уравнений в нецилиндрической области”, *Дальневосточный мат. журнал.*, **3**:1 (2002), 3–17.

[9] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М, 1972, 588 с.

[10] С. Н. Глазатов, “Некоторые задачи для дважды нелинейных параболических уравнений в нецилиндрических областях”, *Диф. и интегр. уравнения мат. модели*, Тезисы докладов межд. науч. конференции, Челябинский гос. ун-т, Челябинск, 2002, 31.

[11] Н. Е. Истомина, А. Г. Подгаев, “О разрешимости задачи для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения в области с нецилиндрической границей”, *Дальневосточный математический журнал*, **1**:1 (2000), 63–73.

[12] Е. Г. Агапова, *Исследование разрешимости задач для нестационарных вырождающихся на решении нелинейных уравнений*, Дис. ... канд. ф.-м. наук: 01.01.02., ХГТУ, Хабаровск, 2000.

[13] Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторно-дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978, 336 с.

[14] Ю. А. Дубинский, “Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка”, *Успехи математических наук*, **XXIII**:1(139) (1968), 45–90.

[15] Г. В. Демиденко, *Введение в теорию соболевских пространств*, Учебное пособие, Новосиб. ун-т., Новосибирск, 1995, 111 с.

[16] Н. Е. Истомина, *Развитие метода монотонности на случай параболического уравнения в нецилиндрической области*, Препринт № 6 ИПМ ДВО РАН, Дальнаука, Владивосток, 2001, 40 с.

[17] Н. Е. Истомина, А. Г. Подгаев, “Теорема единственности для нелинейного параболического уравнения в нецилиндрической области”, *Мат. заметки ЯГУ*, **10**:1 (2003), 27–33.

[18] А. Г. Подгаев, А. З. Син, “Об одном обобщении леммы Вишика – Дубинского и неравенства Гронуолла”, *Электронное научное издание "Учёные заметки ТОГУ"*, **4**:4 (2013), 2113–2118.

[19] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М, 1973, 408 с.

[20] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М, 1968, 496 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 14 октября 2013 г.

Podgaev A. G., Istomina N. E. On Faedo-Galerkin methods and monotony in a non-cylindrical domain for a degenerate quasi-linear equation. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 1. P. 73–89.

ABSTRACT

In this article a monotony method for nonstationary equations adapt to noncylindrical domains. Existence theorems are proved. A family of basic functions constructed. These functions have a smooth parameter and a completeness property for every one.

Key words: *non-cylindrical domain, monotony method, family of basic functions, quasi-linear equation.*