Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 2. С. 196–208

УДК 517.54
MSC2010 30C85, 30C75

© В. Н. Дубинин, В. Ю. Ким[1]

Обобщенные конденсаторы и теоремы о граничном искажении при конформном отображении

Методами теории потенциала доказываются теоремы о граничном искажении при отображении голоморфными однолистными в круге функциями. В частности, устанавливаются дискретные аналоги классических утверждений о поведении логарифмической емкости граничных множеств при конформном отображении.

Ключевые слова: *конденсаторы, конформная емкость, мероморфные функции, однолистные функции, граничное искажение, угловая производная.*

Введение

Пусть функция $w = f(z)$ голоморфна в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяет условиям: $f(0) = 0$ и $|f(z)| < 1$, когда $z \in U$. Если E – дуга окружности $|z| = 1$ такая, что множество предельных значений функции f относительно E принадлежит окружности $|w| = 1$, то это множество также является дугой $f(E)$ окружности $|w| = 1$. Согласно классической лемме Левнера длина $l(f(E))$ дуги $f(E)$ не меньше длины $l(E)$ дуги E [1]. Этот результат обобщался и дополнялся многими математиками вплоть до нашего времени. Из ранних уточнений леммы Левнера отметим неравенство Ункельбаха

$$l(f(E)) \geq \frac{2}{1 + |f'(0)|}\, l(E), \tag{1}$$

установленное в 1938 году [2]. Если в точке $b \in E$ существует производная $f'(b)$, то предельным переходом из (1) получаем граничную лемму Шварца:

$$|f'(b)| \geq \frac{2}{1 + |f'(0)|} \geq 1$$

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `dubinin@iam.dvo.ru, kimv@mail.primorye.ru`

(ср. [3, неравенство (1)]). Пусть, дополнительно, функция f однолистна в круге U. Тогда справедливо неравенство

$$\sin\frac{l(f(E))}{4} \geq |f'(0)|^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{l(E)}{4}. \qquad (2)$$

Неравенство (2) впервые доказано Комату параметрическим методом [4]. Предельный случай этого неравенства

$$|f'(b)| \geq |f'(0)|^{-\frac{1}{2}}$$

неоднократно передоказывался в литературе. Неравенство (2) можно переписать в виде

$$\operatorname{cap} f(E) \geq |f'(0)|^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cap} E, \qquad (3)$$

где $\operatorname{cap}(\Omega)$ означает логарифмическую емкость (трансфинитный диаметр) множества Ω. На самом деле неравенство (3) выполняется для любых борелевских подмножеств E окружности $|z| = 1$ таких, что существуют угловые пределы $f(z)$, $|f(z)| = 1$, для всех $z \in E$ (см. [5, с. 217]). Среди многочисленных теорем о граничном искажении отметим следующий замечательный результат Коуэна и Поммеренке [6]. Пусть функция $f : U \to U$ голоморфна и однолистна в круге U, и пусть $z_0, z_1, \ldots, z_n$ – различные граничные неподвижные точки функции f, причем $f'(z_0) < 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\log f'(z_k)} \leq -\frac{1}{\log f'(z_0)}. \qquad (4)$$

В голоморфной динамике точка z_0 называется притягивающей, а точки z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, называются отталкивающими неподвижными точками функции f. В работе [6] при доказательстве неравенства (4) существенно использовалось классическое неравенство Грунского. О других подходах к доказательствам близких фактов можно прочесть, например, в статьях [7] и [8]. В сравнительно недавней работе [9] методом экстремальной метрики [10], [11] получено весовое неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)|^{\alpha_k^2} \geq |f'(z_0)|^{-1}, \qquad (5)$$

справедливое в условиях неравенства (4) при любых неотрицательных числах α_1, α_2, $\ldots$, α_n таких, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. Можно показать, что неравенство (5) содержит неравенство (4) [9]. Ранее Дженкинс [12] применил метод экстремальной метрики к обобщению леммы Левнера на случай многосвязных областей.

В данной заметке показывается, что к рассмотренному выше кругу задач успешно применим метод обобщенных конденсаторов [13]–[16]. Применяя только простейшие свойства таких конденсаторов и асимптотическую формулу для емкостей этих конденсаторов, мы получаем неравенство (5) при более слабых ограничениях на веса α_k (теорема 1). Кроме того, мы доказываем дискретный аналог неравенства (3) (теорема 2) и впервые рассматриваем весовое граничное неравенство для семейства однолистных функций (теорема 3). В том случае, когда указанное семейство состоит только из одной функции, наше неравенство дает дискретный аналог известного утверждения о поведении логарифмической емкости граничных множеств при отображении функциями класса $\sum$ [5, с. 219].

1. Асимптотическая формула для емкости конденсатора

В этом параграфе приводятся необходимые в дальнейшем определения и утверждения, взятые из [15]. Пусть B – открытое множество на комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Обобщенным конденсатором в $\overline{B}$ называют тройку $C = (B, \mathcal{E}, \Delta)$, где $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ – совокупность замкнутых непустых попарно непересекающихся множеств $E_k \subset \overline{B}$, $k = 1, \ldots, n$, а $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^{n}$ – совокупность вещественных чисел δ_k, $k = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$. Множества E_k будем называть пластинами этого конденсатора, а числа δ_k – уровнями потенциала или, короче, потенциалами пластин E_k, $k = 1, \ldots, n$. Емкость конденсатора C определяется как точная нижняя граница интегралов Дирихле

$$\iint\limits_{B \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k} |\nabla v|^2 \, dx \, dy$$

по всем допустимым функциям v, то есть вещественнозначным функциям v, непрерывным в $\overline{B}$, удовлетворяющим условию Липшица внутри множества B и равным δ_k на E_k, $k = 1, \ldots, n$. В дальнейшем слово "обобщенный"в названии конденсатора будем опускать. Конденсатор $C = (B, \mathcal{E}, \Delta)$ назовем симметричным относительно окружности $|z| = 1$, если множество B и пластины совокупности $\mathcal{E}$ обладают указанной симметрией. Следующее утверждение доказано в работе [13, Утверждение 2] (см. также упражнение 1.3(8) в [15]).

Лемма 1. *Пусть конденсатор* $C = (\overline{\mathbb{C}}_z, \{E_k\}_{k=1}^{n}, \Delta)$ *симметричен относительно окружности* $|z| = 1$, *а конденсатор* $\widetilde{C} = (\overline{\mathbb{C}}_w, \{\widetilde{E}_k\}_{k=1}^{n}, \Delta)$ *симметричен относительно окружности* $|w| = 1$. *Предположим, что существует голоморфная однолистная в круге* $U = \{z : |z| < 1\}$ *функция* $w = f(z)$ *такая, что* $|f(z)| < 1$ *при* $z \in U$ *и* $f(E_k \cap \overline{U}) \subset \widetilde{E}_k$, $k = 1, \ldots, n$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap} C \leq \operatorname{cap} \widetilde{C}.$$

Пусть теперь z_0 – фиксированная точка плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, $U(z_o, \tau) = \{z : |z - z_0| < \tau\}$ в случае конечной точки z_0 и $U(\infty, \tau) = \{z : |z| > 1/\tau\}$. Параметрическое семейство областей $D(z_0, r)$, $0 < r < r_0$, назовем асимптотически круговым, если выполняются включения

$$U(z_o, s(r)) \subset D(z_0, r) \subset U(z_0, t(r))$$

для некоторых положительных функций $s(r)$ и $t(r)$, $0 < r < r_0$, удовлетворяющих условиям $s(r) \sim t(r) \sim r$ при $r \to 0$. Элемент асимптотически кругового семейства $D(z_0, r)$ (а также его замыкание $\overline{D(z_0, r)}$) принято называть почти кругом с центром в точке z_0 радиуса r.

Лемма 2. *Пусть $z_1, \ldots, z_n$ – произвольные различные точки сферы $\mathbb{C}$; $\delta_1, \ldots, \delta_n$ – произвольные вещественные числа; μ_k, ν_k, $k = 1, \ldots, n$, – произвольные положительные числа. Предположим, что для некоторого $r_0 > 0$ замыкания почти кругов $D(z_k, \mu_k r^{\nu_k})$, $k = 1, \ldots, n$, попарно не пересекаются, $0 < r < r_0$. Тогда для емкости конденсатора*

$$C(r) = (\overline{\mathbb{C}}, \{\overline{D(z_k, \mu_k r^{\nu_k})}\}_{k=1}^n, \{\delta_k\}_{k=1}^n)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\operatorname{cap} C(r) = -2\pi \sum_{k=1}^n \frac{(\delta_k - \delta)^2}{\nu_k \log r} + 2\pi R \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0, \tag{6}$$

где

$$\delta = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{\nu_k} \Big/ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\nu_k}\right),$$

$$R = \sum_{k=1}^n \frac{(\delta_k - \delta)^2}{\nu_k^2} \log \mu_k + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n{}' \frac{(\delta_k - \delta)(\delta_l - \delta)}{\nu_k \nu_l} \log |z_k - z_l|,$$

и штрих у знака суммы означает, что при $z_k = \infty (z_l = \infty)$ под соответствующим слагаемым понимается нуль.

Доказательство леммы 2 сводится к изменению всех уровней потенциалов пластин конденсатора $C(r)$ на постоянную величину δ и последующему применению формулы (2) из работы [17] (см. также теорему 2.5 [15]).

2. Ограниченные однолистные функции

Покажем сначала, что неравенство (5) справедливо при более слабых ограничениях на функцию f и числа α_k, $k = 1, \ldots, n$.

Теорема 1. *Пусть функция f голоморфна и однолистна в круге U, $f(U) \subset U$, и пусть в различных граничных точках $z_k \in \partial U$, $k = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$, существуют угловые пределы $f(z_k)$ такие, что $f(z_k) = z_k$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда*

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)|^{\alpha_k^2} \geq 1, \tag{7}$$

где $f'(z_k)$ означает угловую производную функции f в точке z_k, $k = 1, \ldots, n$, а α_k, $k = 1, \ldots, n$, – произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k = 0$.

Доказательство. Существование угловых производных вытекает из известных фактов теории однолистных функций [5, с. 71, 82]. Можно считать, что все производные $f'(z_k)$ конечны. В этом случае в точках z_k существуют угловые пределы функции $f'(z)$, $z \in U$, равные $f'(z_k)$, $k = 1, \dots, n$ [5, с. 79]. Поэтому получим сначала неравенство для внутренних точек круга U. Пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ – различные точки из U, отличные от начала координат. При достаточно малом $r > 0$ определены конденсаторы вида

$$C(r) = (\overline{\mathbb{C}}_z, \{\overline{D(\zeta_1, r)} \cup \overline{D(1/\overline{\zeta}_1, r/|\zeta_1^2|)}, \dots, \overline{D(\zeta_n, r)} \cup \overline{D(1/\overline{\zeta}_n, r/|\zeta_n^2|)}\}, \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}),$$

$$\widetilde{C}(r) = (\overline{\mathbb{C}}_w, \{\overline{D(f(\zeta_1), r|f'(\zeta_1)|)} \cup \overline{D(1/\overline{f(\zeta_1)}, r|f'(\zeta_1)/f^2(\zeta_1)|)},$$
$$\dots, \overline{D(f(\zeta_n), r|f'(\zeta_n)|)} \cup \overline{D(1/\overline{f(\zeta_n)}, r|f'(\zeta_n)/f^2(\zeta_n)|)}\}, \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}),$$

где почти круги подобраны таким образом, чтобы конденсаторы $C(r)$, $\widetilde{C}(r)$ были симметричны относительно окружностей соответственно $|z| = 1$, $|w| = 1$ и выполнялись включения

$$f(\overline{D(\zeta_k, r)}) \subset \overline{D(f(\zeta_k), r|f'(\zeta_k)|)}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

По лемме 1 для малых значений $r > 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{cap} C(r) \le \operatorname{cap} \widetilde{C}(r). \tag{8}$$

Емкости конденсаторов $C(r)$ и $\widetilde{C}(r)$ не изменятся, если их рассматривать как конденсаторы, состоящие из $2n$ почти кругов, каждый с прежними потенциалами пластин. Применяя формулу (6) к таким представлениям конденсаторов, приходим к равенствам

$$\operatorname{cap} C(r) = -4\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^2}{\log r} + 2\pi R \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \qquad r \to 0,$$

$$\operatorname{cap} \widetilde{C}(r) = -4\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^2}{\log r} + 2\pi \widetilde{R} \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \qquad r \to 0,$$

где

$$R = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \log \frac{1}{|\zeta_k^2|} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \ne k}}^{n} \alpha_k \alpha_l \log |\zeta_k - \zeta_l| + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \ne k}}^{n} \alpha_k \alpha_l \log \left|\frac{1}{\zeta_k} - \frac{1}{\zeta_l}\right|$$
$$+ 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_k \alpha_l \log \left|\overline{\zeta}_k - \frac{1}{\zeta_l}\right|,$$

$$\widetilde{R} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \log |f'(\zeta_k)| + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \log \left|\frac{f'(\zeta_k)}{f^2(\zeta_k)}\right| + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \ne k}}^{n} \alpha_k \alpha_l \log |f(\zeta_k) - f(\zeta_l)|$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \ne k}}^{n} \alpha_k \alpha_l \log \left|\frac{1}{f(\zeta_k)} - \frac{1}{f(\zeta_l)}\right| + 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_k \alpha_l \log \left|\overline{f(\zeta_k)} - \frac{1}{f(\zeta_l)}\right|.$$

Неравенство (8) дает

$$R \leq \widetilde{R}.$$

Переходя в этом соотношении к пределам при $\zeta_k \to z_k$ вдоль радиусов $(0, z_k)$, $k = 1, \ldots, n$, получим неравенство (7). Теорема доказана. □

Из неравенства (7) следует известный факт голоморфной динамики, говорящий о том, что возможна лишь одна граничная неподвижная притягивающая точка. Заметим, что неравенство (5) вытекает из неравенства (7). Однако усиление в (7) не столь значительно, так как существует только одна притягивающая точка, а остальные – отталкивающие. Вместе с тем мы получили (7) без привлечения других идей, пользуясь, по существу, только монотонностью емкости. Предположим, что в условиях теоремы 1 выполняется равенство $f(0) = 0$. Повторяя предыдущее доказательство с тем лишь изменением, что у рассматриваемых конденсаторов добавляются пластины в виде почти кругов с центрами в точках $z = 0$ $(w = 0)$ и $z = \infty$ $w = \infty$, приходим к неравенству теоремы 5.1 статьи [18] для любых весов (не только неотрицательных).

Напомним, что n-ым диаметром замкнутого ограниченного множества E плоскости $\mathbb{C}$ называется величина

$$d_n(E) = \max_{z_k, z_l \in E} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} |z_k - z_l| \right\}^{\frac{1}{n(n-1)}}, \qquad n \geq 2.$$

Известно, что $\lim\limits_{n \to \infty} d_n(E) = \operatorname{cap} E$ [5, с. 195]. В связи с неравенством (3) естественно поставить вопрос о поведении n-го диаметра граничных множеств при конформном отображении. Частичный ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Предположим, что функция f голоморфна и однолистна в круге U, $f(0) = 0$, $f(U) \subset U$, и в некоторых различных точках $z_k \in \partial U$, $k = 1, \ldots, n$, $n \geq 1$, существуют угловые пределы $f(z_k)$ такие, что $|f(z_k)| = 1$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда*

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} |f(z_k) - f(z_l)| \geq \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} |z_k - z_l|}{|f'(0)|^{\frac{n^2}{2}} \prod\limits_{k=1}^{n} |f'(z_k)|}, \tag{9}$$

где $f'(z_k)$ – угловая производная функции f в точке z_k, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 1, рассмотрим сперва различные точки ζ_k, $k = 1, \ldots, n$, круга U, отличные от начала координат. При достаточно малом $r > 0$ определены конденсаторы вида

$$C(r) = (\overline{\mathbb{C}}_z, \{\overline{D(0,r)} \cup \overline{D(\infty,r)}, \overline{D(\zeta_1,r)} \cup \overline{D(1/\overline{\zeta}_1, r/|\zeta_1^2|)}, \ldots, \overline{D(\zeta_n,r)} \cup \overline{D(1/\overline{\zeta}_n, r/|\zeta_n^2|)}\}, \{n,-1,\ldots,-1\}),$$

$$\widetilde{C}(r) = (\overline{\mathbb{C}}_w, \{\overline{D(0,r|f'(0)|)} \cup \overline{D(\infty,r|f'(0)|)}, \overline{D(f(\zeta_1),r|f'(\zeta_1)|)} \cup \overline{D(1/\overline{f(\zeta_1)}, r|f'(\zeta_1)/f^2(\zeta_1)|)}, \ldots, \overline{D(f(\zeta_n),r|f'(\zeta_n)|)} \cup \overline{D(1/\overline{f(\zeta_n)}, r|f'(\zeta_n)/f^2(\zeta_n)|)}\}, \{n,-1,\ldots,-1\}),$$

где почти круги подобраны таким образом, чтобы конденсаторы $C(r)$, $\widetilde{C}(r)$ были симметричны относительно окружностей $|z| = 1$, $|w| = 1$ соответственно и выполнялись включения, необходимые для применения леммы 1. Согласно этой лемме справедливо неравенство (8), но уже для новых конденсаторов $C(r)$, $\widetilde{C}(r)$. Как и при доказательстве теоремы 1, применяем формулу (6) к конденсаторам, чьи пластины образуют совокупности из $2n+2$ почти кругов. В результате приходим к следующему неравенству:

$$\sum_{k=1}^{n} \log\frac{1}{|\zeta_k^2|} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \log\left[|\zeta_k-\zeta_l|\left|\frac{1}{\zeta_k}-\frac{1}{\zeta_l}\right|\right] + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\log\left|\overline{\zeta}_k - \frac{1}{\zeta_l}\right| \leq$$
$$\leq 2n^2\log|f'(0)| + \sum_{k=1}^{n}\log|f'(\zeta_k)| + \sum_{k=1}^{n}\log|f'(\zeta_k)/f^2(\zeta_k)|$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\log\left[|f(\zeta_k)-f(\zeta_l)|\left|\frac{1}{f(\zeta_k)}-\frac{1}{f(\zeta_l)}\right|\right] + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\log\left|\overline{f(\zeta_k)}-\frac{1}{f(\zeta_l)}\right|.$$

Отсюда

$$-\sum_{k=1}^{n}\log|\zeta_k^2| + 4\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\log|\zeta_k-\zeta_l| - \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\log|\zeta_k\zeta_l| - 2n\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\log|\zeta_l| + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\log\left|\frac{1-\overline{\zeta_k}\zeta_l}{\zeta_k-\zeta_l}\right|$$
$$\leq 2\sum_{k=1}^{n}\log\frac{1-|f(\zeta_k)|^2}{1-|\zeta_k|^2} + 2n^2\log|f'(0)| + \sum_{k=1}^{n}\log|f'(\zeta_k)/f(\zeta_k)|^2$$
$$+4\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\log|f(\zeta_k)-f(\zeta_l)| - \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\log|f(\zeta_k)f(\zeta_l)| - 2n\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\log|f(\zeta_l)|$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\log\left|\frac{1-\overline{f(\zeta_k)}f(\zeta_l)}{f(\zeta_k)-f(\zeta_l)}\right|.$$

Осталось перейти к радиальным пределам при $\zeta_k \to z_k$, $k = 1,\ldots,n$. Теорема доказана. $\square$

Неравенство (9) можно рассматривать как дискретный аналог неравенства (3). Пусть функция f голоморфна и однолистна в круге U, $f(0)=0$, $f(U)\subset U$ и для всех точек z некоторого компакта E на окружности $|z|=1$ существуют угловые пределы $f(z)$, $|f(z)|=1$. Предположим, что угловая производная $f'(z)$ ограничена на E, то есть существует константа M такая, что $|f'(z)|\le M$ для всех $z\in E$. Выпишем неравенство (9) для точек z_k, $k=1,\dots,n$, при которых достигается n-ый диаметр $d_n(E)$. После чего возведем обе части этого неравенства в степень $1/(n(n-1))$ и заменим левую часть на максимум. В результате получим неравенство

$$d_n(f(E))\ge \frac{d_n(E)}{|f'(0)|^{\frac{n}{2(n-1)}}M^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Устремляя в этом неравенстве $n\to\infty$, приходим к неравенству (3).

3. Семейства однолистных функций

Наш подход позволяет доказывать многоточечные теоремы о граничном искажении для семейств однолистных функций. Ранее подобные результаты в литературе не рассматривались. Для простоты изложения ограничимся одной такой теоремой, из доказательства которой видно, каким путем можно получить другие версии подобных утверждений.

Предположим, что для функции $f:U\to\overline{\mathbb{C}}$ в некоторой граничной точке $z_0\in\partial U$ существует конечный предел $f(z_0)$. Будем говорить, что отображение f сжимающее в точке z_0 с коэффициентом $\lambda(z_0)$, если справедлива асимптотическая оценка

$$|f(z)-f(z_0)|\le\lambda(z_0)|z-z_0|(1+o(1)),\qquad z\to z_0,\quad z\in U.$$

Ясно, что если функция f дифференцируемая в точке z_0, то она осуществляет в этой точке сжимающее отображение с коэффициентом $\lambda(z_0)=|f'(z_0)|$.

Теорема 3. *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n$, $n\ge 1$, – семейство мероморфных и однолистных в круге U функций, отображающих этот круг на попарно неналегающие области. Пусть $\{z_{kl}\}_{l=1}^{n_k}$, $k=1,\dots,n$, – совокупности различных граничных точек $z_{kl}\in\partial U$, для которых существуют пределы $f_k(z_{kl})\ne\infty$ и в которых функции f_k осуществляют сжимающее отображение с коэффициентом $\lambda(z_{kl})$, $k=1,\dots,n$, $l=1,\dots,n_k$, $n_k\ge 1$. Предположим, что для каждой точки z_{kl}, $1\le k\le n$, $1\le l\le n_k$, существует одна и только одна другая точка $z_{k'l'}\ne z_{kl}$ такая , что $f_k(z_{kl})=f_{k'}(z_{k'l'})$, $1\le k'\le n$, $1\le l'\le n_{k'}$. Тогда для любых вещественных чисел α_k, $k=1,\dots,n$ удовлетворяющих условию*

$$\left(\sum_{k=1}^n\alpha_k(n_k+2)\right)^2=2\left(n+\frac12\sum_{k=1}^n n_k\right)\sum_{k=1}^n\alpha_k^2(n_k+2),\tag{10}$$

справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{|f_k'(0)|^{\alpha_k^2n_k^2}\prod\limits_{l=1}^{n_k}\lambda(z_{kl})^{2\alpha_k^2}}{\prod\limits_{l=1}^{n_k}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n_k}|z_{kl}-z_{kj}|^{2\alpha_k^2}}\geq$$

$$\geq\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{s=1}^{n}\prod\limits_{t=1}^{n_s}|f_k(0)-f_s(z_{st})|^{\delta(\delta_k-\delta)}}{\left[\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}|f_k(0)-f_l(0)|^{(\delta_k-\delta)(\delta_l-\delta)}\right]\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{s=1}^{n}\prod\limits_{l=1}^{n_k}\prod\limits_{t=1}^{n_s}{}'|f_k(z_{kl})-f_s(z_{st})|^{\delta^2/4}},$$

где $\delta_k=\alpha_k(n_k+2)$, $k=1,\ldots,n$, $\delta=(\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k)/(n+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}n_k)$, *а штрих у знака произведения означает, что при* $f_k(z_{kl})=f_s(z_{st})$ *вместо разности* $f_k(z_{kl})-f_s(z_{st})$ *берется единица.*

Доказательство. При достаточно малом $r>0$ рассмотрим следующие конденсаторы

$$C_k(r)=(\overline{\mathbb{C}}_z,\{\overline{D(0,r/|f_k'(0)|)},\overline{D(z_{k1},r/\lambda(z_{k1}))}\cap\overline{U},\ldots,\overline{D(z_{kn_k},r/\lambda(z_{kn_k}))}\cap\overline{U}\},$$
$$\{\delta_k,0,\ldots,0\}),\qquad k=1,\ldots,n,$$
$$C_k^*(r)=(\overline{\mathbb{C}}_z,\{\overline{D(0,r/|f_k'(0)|)}\cup\overline{D(\infty,r/|f_k'(0)|)},\overline{D(z_{k1},r/\lambda(z_{k1}))},\ldots,\overline{D(z_{kn_k},r/\lambda(z_{kn_k}))}\},$$
$$\{\delta_k,0,\ldots,0\}),\qquad k=1,\ldots,n,$$
$$C(r)=(\overline{\mathbb{C}}_w,\{\overline{D(f_1(0),r)},\ldots,\overline{D(f_n(0),r)},\overline{D(w_1,r)},\ldots,\overline{D(w_m,r)}\},\{\delta_1,\ldots,\delta_n,0,\ldots,0\}),$$

где $w_1,\ldots,w_m$ – всевозможные различные точки вида $f_k(z_{kl})$, $k=1,\ldots,n$, $l=1,\ldots,n_k$, $m=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}n_k$, а почти круги подобраны таким образом, чтобы конденсаторы $C_k^*(r)$, $k=1,\ldots,n$, были симметричны относительно окружности $|z|=1$ и выполнялись включения

$$f(D(z_{kl},r/\lambda(z_{kl}))\cap U)\subset D(f(z_{kl}),r),$$

$k=1,\ldots,n$, $l=1,\ldots,n_k$. Применяя принципы композиции и учитывая конформную инвариантность емкости, получаем неравенство

$$\operatorname{cap}C(r)\geq\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cap}C_k(r)$$

(см. теорему 1.17 в [15]). По принципу симметрии (теорема 1.20 в [15])

$$\operatorname{cap}C_k(r)=\frac{1}{2}\operatorname{cap}C_k^*(r),\qquad k=1,\ldots,n.$$

Таким образом,

$$\operatorname{cap} C(r) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cap} C_k^*(r). \tag{11}$$

Согласно лемме 2

$$\operatorname{cap} C(r) = -2\pi \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(\delta_k - \delta)^2}{\log r} + \frac{m\delta^2}{\log r} \right) + 2\pi R \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \to 0,$$

$$R = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} (\delta_k - \delta)(\delta_l - \delta) \log |f_k(0) - f_l(0)| - 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \delta(\delta_k - \delta) \log |f_k(0) - w_s| +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} \delta^2 \log |w_s - w_t|,$$

$$\operatorname{cap} C_k^*(r) = -2\pi \left(2 \frac{(\delta_k - \widetilde{\delta}_k)^2}{\log r} + \frac{n_k \widetilde{\delta}_k^2}{\log r} \right) + 2\pi R_k \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \to 0,$$

$$R_k = 2(\delta_k - \widetilde{\delta}_k)^2 \log \frac{1}{|f_k'(0)|} + \sum_{l=1}^{n_k} \widetilde{\delta}_k^2 \log \frac{1}{\lambda(z_{kl})} + \sum_{l=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \widetilde{\delta}_k^2 \log |z_{kl} - z_{kj}|,$$

$$\widetilde{\delta}_k = \frac{2\delta_k}{n_k + 2}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Подставляя выписанные асимптотические разложения в (11) и учитывая равенство (10), приходим к следующему неравенству

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} (\delta_k - \delta)(\delta_l - \delta) \log |f_k(0) - f_l(0)| - \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n_s} \delta(\delta_k - \delta) \log |f_k(0) - f_s(z_{st})| +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \sum_{l=1}^{n_k} {\sum_{t=1}^{n_s}}' \delta^2 \log |f_k(z_{kl}) - f_s(z_{st})| \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{n_k^2 \delta_k^2}{(n_k + 2)^2} \log \frac{1}{|f_k'(0)|} + \sum_{l=1}^{n_k} \frac{2\delta_k^2}{(n_k + 2)^2} \log \frac{1}{\lambda(z_{kl})} + \sum_{l=1}^{n_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{n_k} \frac{2\delta_k^2}{(n_k + 2)^2} \log |z_{kl} - z_{kj}| \right\},$$

где штрих у знака суммы означает, что при $f_k(z_{kl}) = f_s(z_{st})$ вместо разности $f_k(z_{kl}) - f_s(z_{st})$ берется единица. Непосредственно видно, что полученное неравенство совпадает с неравенством теоремы 3. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Пусть функция f мероморфна и однолистна в круге U, $f(0) = 0$. Предположим, что f определена также в различных точках z_l, $|z_l| = 1$, вместе со своими производными $f'(z_l)$, $l = 1, \ldots, 2m$, причем для каждой точки z_l, $1 \leq$*

$l \le 2m$, существует другая точка $z_{l'} \neq z_l$ такая, что $f(z_l) = f(z_{l'})$, $1 \le l' \le 2m$. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{|f'(0)|^{2m^2} \prod\limits_{l=1}^{2m} |f'(z_l)|}{\prod\limits_{l=1}^{2m} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{2m} |z_l - z_j|} \ge \frac{\prod\limits_{l=1}^{2m} |f(z_l)|^{2m}}{\prod\limits_{l=1}^{2m} {\prod\limits_{j=1}^{2m}}' |f(z_l) - f(z_j)|^{\frac{1}{2}}}, \tag{12}$$

где штрих у произведения означает, что при $f(z_l) = f(z_j)$ вместо разности $f(z_l) - f(z_j)$ берется единица.

Доказательство. Положим в теореме 3 $n = 1$, $f_1 = f$, $z_{1l} = z_l$, $\alpha_1 = 1$, $n_1 = 2m$. Тогда $\delta_1 = 2(m+1)$, $\delta = 2$ и выполняется условие (10). Осталось воспользоваться неравенством теоремы 3. Следствие доказано. □

Неравенство (12) содержит дискретный аналог известного соотношения между логарифмическими емкостями образа и прообраза граничного множества при отображении функциями класса $\sum$ [5, с. 219]. Действительно, пусть функция F принадлежит классу $\sum$, то есть является мероморфной и однолистной в области $|\zeta| > 1$, а в некоторой окрестности бесконечности справедливо разложение

$$F(\zeta) = \zeta + a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \dots$$

Предположим, что функция F определена также вместе со своей производной на некотором компакте E на окружности $|\zeta| = 1$, причем для любой точки $\zeta \in E$ существует другая точка $\zeta' \in E$, $\zeta' \neq \zeta$, такая, что $F(\zeta) = F(\zeta')$. Если теперь $w_1, \dots, w_m$ – произвольные различные точки образа $F(E)$, а $\zeta_1, \dots, \zeta_{2m}$ – все соответствующие им точки на компакте E ($F(\zeta_l) \subset \{w_s\}_{s=1}^m$, $l = 1, \dots, 2m$), то, применяя к функции $f(z) = 1/F(1/z)$ и точкам $z_l = 1/\zeta_l$, $l = 1, \dots, 2m$, неравенство (12), приходим к соотношению

$$\prod_{s=1}^{m} \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq s}}^{m} |w_s - w_t|^2 \ge \frac{\prod\limits_{l=1}^{2m} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{2m} |\zeta_l - \zeta_j|}{\prod\limits_{l=1}^{2m} |F'(\zeta_l)|}.$$

При дополнительных ограничениях на функцию F это неравенство дает оценку

$$\text{cap}\, F(E) \ge (\text{cap}\, E)^2.$$

На самом деле последнее неравенство справедливо для любой функции $F \in \sum$ и любого борелевского множества E, для которого существуют значения функции $F(\zeta)$, $\zeta \in E$ [5, теорема 9.23].

Список литературы

[1] K. Löwner, “Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises”, *Math. Ann*, **89** (1923), 103–121.

[2] H. Unkelbach, “Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung”, *Math. Zeitschr*, **43** (1938), 739–742.

[3] R. Osserman, “A Sharp Schwarz inequality on the boundary”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128** (2000), 3513–3517.

[4] Y. Komatu, “Über eine Verschärfung des Löwnerschen Hilfssatzes”, *Proc. Imperial Acad. Japan.*, **18**:7 (1942), 354–359.

[5] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[6] C. C. Cowen, Ch. Pommerenke, “Inequalities for the angular derivative of an analytic function in the unit disk”, *J. London Math. Soc.*, **2**:26 (1982), 271–289.

[7] K. Y. Li, “Inequalities for fixed points of holomorphic functions”, *Bull. London Math. Soc.*, **22** (1990), 446–452.

[8] D. Bolotnikov, “On Cowen-Pommerenke inequalities”, *Linear Multilinear Algebra*, **60**:2 (2012), 249–254.

[9] M. D. Contreras, S. Diaz-Madrigal, A. Vasil’ev,, “Digons and angular derivatives of analytic self-maps of the unit disk”, *Complex variables and elliptic equations*, **52** (2007), 685–691.

[10] А. Ю. Солынин, “Модули и экстремально-метрические проблемы”, *Алгебра и анализ*, **11**:1 (1999), 3–86.

[11] A. Vasil’ev, *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings, Lecture Notes in Math., 1788*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 2002.

[12] J. A. Jenkins, “Some theorems on boundary distortion”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 477–500.

[13] В. Н. Дубинин, Н. В. Эйрих, “Некоторые применения обобщенных конденсаторов в теории аналитических функций”, *Записки научных семинаров ПОМИ*, **314** (2004), 52–75.

[14] В. Н. Дубинин, В. Ю. Ким, “Теоремы искажения для регулярных и ограниченных в круге функций”, *Записки научных семинаров ПОМИ*, **350** (2007), 26–39.

[15] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.

[16] V. N. Dubinin, M. Vuorinen, “Robin functions and distortion theorems for regular mappings”, *Math. Nachr.*, **283** (2010), 1589–1602.

[17] В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалев, “Приведенный модуль комплексной сферы”, *Записки научных семинаров ПОМИ*, **254** (1998), 76–94.

[18] J. M. Anderson, A. Vasil’ev, “Lower Shwarz-Pick estimates and angular derivatives”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **33** (2008), 101–110.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 14 мая 2013 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00038) и ДВО РАН (проект 12-I-ОМН-02)

Dubinin V. N., Kim V. Yu. Generalized condensers and boundary distortion theorems for conformal mappings. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 2. P. 196–208.

ABSTRACT

In this paper we prove some boundary distortion theorems for the univalent holomorphic functions in the unit disk by the potential theory. In particular, the discrete analogs of the classical statements on the behavior of the logarithmic capacity of the boundary sets under conformal mappings are established.

Key words: *condensers, conformal capacity, meromorphic functions, univalent functions, boundary distortion, angular derivative.*