

УДК 539.3  
MSC2010 74R20

© А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. А. Овчинникова<sup>1</sup>

## Предельное состояние и малоцикловая усталость пластических материалов

Предлагается подход к описанию предельных состояний материала в пространствах главных напряжений и деформаций. Подход обобщает основные соотношения малоцикловой усталости на пространственные процессы деформирования. В рамках предложенного подхода рассматривается задача о поверхностном выглаживании жесткопластического материала.

Ключевые слова: *пластичность, деформация, диссипация энергии, предельное состояние, малоцикловая усталость*

### Введение

Под предельным состоянием пластических тел понимается состояние, непосредственно предшествующее процессу разрушения (моменту нарушения сплошности среды). В работах [1, 2, 3] это состояние материала описывается замкнутым криволинейным треугольником с тремя осями симметрии в девиаторной плоскости пространства главных напряжений. Возможность описания предельных состояний угловыми точками поверхности нагружения рассматривалась в [4]. Связь между поверхностью нагружения и предельным состоянием материала была отмечена в [5], где предложено считать предельным состоянием материала состояние исчерпания его пластических свойств, т.е. состояние предельного упрочнения.

В работах [6, 7, 8] предельное состояние материала описывается линиями на поверхности деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела. В сечениях этой поверхности плоскостями, параллельными девиаторной плоскости, предлагаемые линии имеют вид криволинейных треугольников, предсказанных в работах [1, 2, 3].

---

<sup>1</sup>Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1; Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет), 443086, Самара, Московское шоссе, 34. Электронная почта: khromovai@list.ru, abukhanko@mail.ru, osa-21@mail.ru

Экспериментальное исследование предельных состояний пластических тел связано, в первую очередь, с испытаниями на малоцикловую усталость при одноосном растяжении–сжатии плоских и цилиндрических образцов [9, 10, 11, 12, 13].

Целью предлагаемой работы является установление связи между теоретическими и экспериментальными работами.

## 1. Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформационных состояний

Линии уровня поверхности деформационных состояний упрочняющихся несжимаемых жесткопластических тел определяются системой уравнений [7, 8]

$$\begin{cases} (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1, \\ E_1 + E_2 + E_3 = I_E, \end{cases} \quad (1)$$

где  $E_i$ , ( $i = \overline{1, 3}$ ) – главные значения тензора конечных деформаций Альманси.

Связь между поверхностью нагружения материала и линиями (1) устанавливается с помощью величины

$$h' = \frac{3\sigma_S(I_E)}{3 - 2I_E}, \quad (2)$$

как функции параметра упрочнения, который совпадает с модулем первого инварианта  $I_E$  тензора конечных деформаций Альманси. Для определения величины  $h'$  необходимо перестроить диаграмму нагружения, обычно задаваемую в координатах  $\sigma - \delta$  в виде  $\sigma = \sigma(\delta)$ , в координаты  $\sigma_S - I_E$  в виде  $\sigma_S = \sigma_S(I_E)$ . Здесь  $\delta$  – относительное удлинение образца;  $\sigma_S = \sigma_S(I_E)$  – значение предела текучести, определяемое из эксперимента на одноосное растяжение цилиндрического образца и характеризующее состояние упрочнения материала на данном уровне деформаций. При этом уровень деформаций определяется параметром упрочнения  $|I_E|$ . Для определения указанных соотношений используется связь между величинами  $I_E$  и  $\delta$ , полученная из кинематики цилиндрического образца при одноосном растяжении [14]

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{\delta(2 + \delta)}{(1 + \delta)^2}, \quad E_2 = E_3 = -\frac{1}{2}\delta.$$

На рис. 1 приведены зависимости  $\sigma = \sigma(\delta)$  и  $\sigma_S = \sigma_S(I_E)$  для конструкционного сплава ЭК79.

Учитывая вышесказанное, уравнение поверхности нагружения при (1), (2) имеет симметричный вид:

$$\begin{aligned} & (\sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_1)(\sigma_3 + \sigma_1 - 2\sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3) + \\ & + \frac{9}{2}\sigma_S(I_E) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = 27\sigma_S^3(I_E) \left[ 1 - \frac{27}{(3 - 2I_E)^3} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

На рис. 2 представлены проекции поверхности нагружения на девиаторную плоскость в пространстве главных напряжений для конструкционного сплава ЭК79.

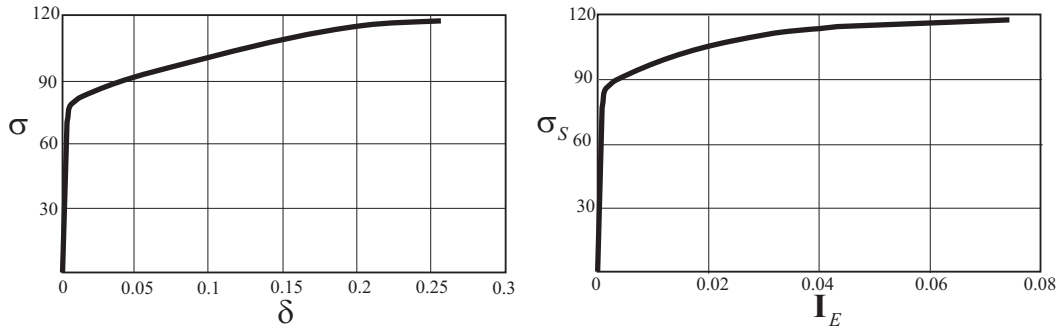


Рис. 1. Диаграмма нагружения для конструкционного сплава ЭК79 в координатах  $\sigma - \delta$  и  $\sigma_S - I_E$

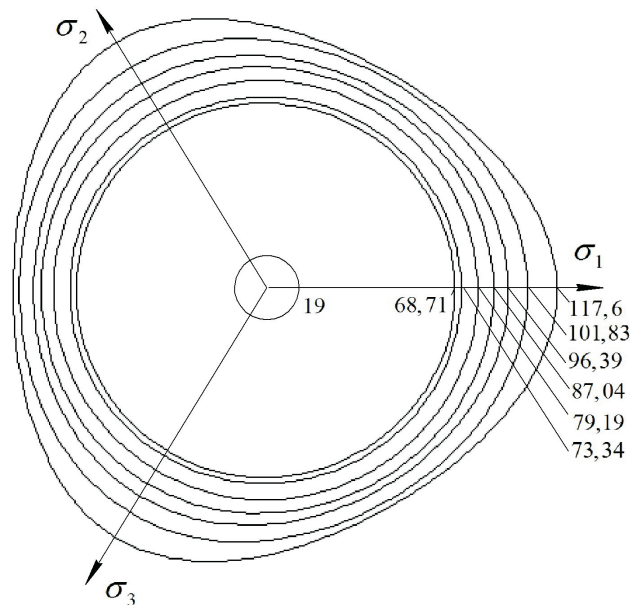


Рис. 2. Линии пересечения поверхности нагружения девиаторной плоскостью для конструкционного сплава ЭК79

## 2. Малоцикловая усталость пластических материалов

Предельное состояние материала при монотонном нагружении не является единственным, что подтверждается многочисленными опытами в условиях малоцикло-вой усталости, описываемой формулой Коффина – Мэнсона [9, 10, 11]

$$\varepsilon_p N^m = M, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_p$  – ширина петли гистерезиса,  $N$  – число циклов,  $m$ ,  $M$  – константы материала. С. Фелтнером и Дж. Морроу [15] была дана энергетическая интерпретация формулы (4), согласно которой разрушение наступает тогда, когда суммарная энергия,

рассеиваемая в единице объема материала, вследствие наличия необратимых пластических деформаций достигает определенной критической величины

$$\sum_{N=1}^{N_p} W_N = W_c, \quad (5)$$

где  $N_p$  – число циклов до разрушения;  $W_N$  – энергия, рассеиваемая в единице объема материала при  $N$ -ом цикле;  $W_c$  – критическая величина энергии, которая равна энергии разрушения при статическом разрыве. В дальнейшем Д. Мартин [16] уточнил данную формулировку, предполагая, что мерой усталостных повреждений является только часть энергии, связанная с процессами упрочнения. В этой трактовке величины  $W_N$  и  $W_c$  характеризуются заштрихованными площадями на рис. 3. В частности, при линейном упрочнении [11]

$$W_c(\sigma_B) = \frac{1}{2}(\sigma_B - \sigma_{0.2})(\delta_B - \delta_{0.2}),$$

где  $\sigma_B$  – предел прочности материала, соответствующий предельному состоянию материала на диаграмме нагружения (точка  $B$  на рис. 3);  $\sigma_{0.2}$  – минимальное значение предела текучести;  $\delta_B, \delta_{0.2}$  – значения относительного удлинения образца соответственно. В данной формуле работа на упругих деформациях не учитывается в виду ее малости.

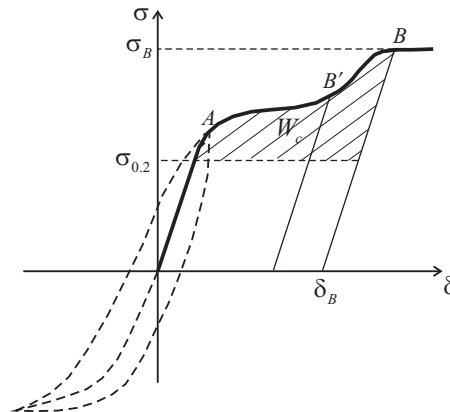


Рис. 3. Энергия пластической деформации (заштрихованная площадь), связанная с процессом упрочнения материала и вызывающая его повреждение

Согласно соотношению (5) процесс доведения материала до критического состояния при жестком циклическом нагружении образца можно трактовать следующим образом: при каждом цикле нагружения критическая точка  $B$  смещается по диаграмме  $\sigma - \delta$  влево согласно энергии гистерезиса в положение  $B'$ , а при достижении определенного деформированного состояния в цикле (точки  $A$ ) материал достигает предельного состояния. Отметим, что на девиаторной плоскости предельному состоянию материала соответствует множество точек определенной линии (см. рис. 2).

Реальные процессы деформирования материала в элементах конструкций могут значительно отличаться от одноосного деформирования, и соотношение (5) необходимо обобщить на пространственные процессы деформирования. Это обобщение должно учитывать следующие особенности малоциклового усталости:

- повреждаемость материала осуществляется за счет энергии гистерезиса на пластических деформациях, связанных с упрочнением материала, что требует учета эффекта Баушингера;

- диапазон пластического деформирования материала значительно превышает диапазон малых деформаций, что требует использования в качестве меры деформаций тензоров конечных деформаций.

### 3. Пластическое течение при обработке поверхности выглаживанием

Усталостное разрушение почти всегда зарождается на поверхности детали или вблизи этой поверхности. Основными факторами, вносящими вклад в усталостное разрушение, служат, кроме геометрических концентраторов деформаций (царапины, выемки, следы от механической обработки), повреждения, вносимые существенными пластическими деформациями в зоне взаимодействия материала детали с режущим инструментом.

Задача о выглаживании возникает в связи с существованием переходной поверхности, соединяющей переднюю и заднюю поверхности резца. Эта поверхность осуществляет деформирование материала после стружкообразования, описанного в [17]. Задача о выглаживании жесткопластической поверхности при условии пластичности Кулона – Мора рассматривалась в работе [18].

Ниже рассматривается пластическое течение для процесса выглаживания (рис. 4) при условии пластичности (3), которое в условиях плоской деформации совпадает с условием Мизеса.

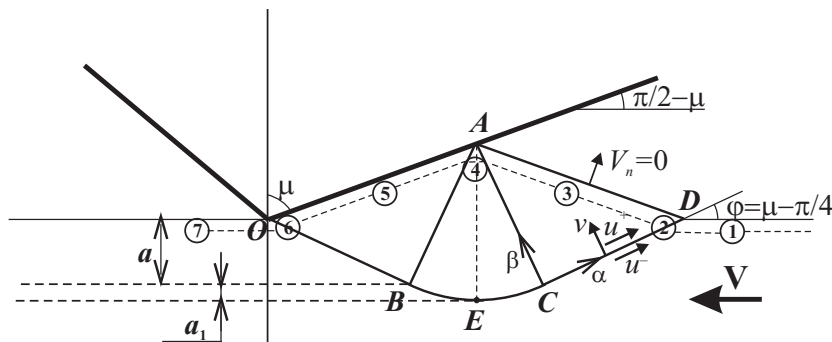


Рис. 4. Пластическое течение при обработке поверхности выглаживанием

Будем рассматривать деформации в поверхностном слое при обработке выглаживанием как однократное циклическое нагружение при  $N = 0.5$  и  $\Delta\varepsilon_p$ , опреде-

ляемое технологическим процессом, что позволяет записать формулу (4) в виде

$$\Delta \varepsilon_p N^m = M(W_{**}), \quad W_{**} = W_c - W_h, \quad (6)$$

где  $W_{**}$  – работа внутренних сил, характеризующая зарождение макротрещины в исходном материале [19];  $W_h$  – работа внутренних сил в поверхностном слое на пластических деформациях, связанных с его упрочнением;  $W_c$  – суммарная работа внутренних сил (5), необходимая для разрушения в поврежденном материале.

В работе предполагается, что обрабатываемый материал является идеальным жесткопластическим с пределом текучести  $\sigma_S = 2k$ ; пластическое течение является установившимся; поверхность  $OA$  режущего клина и свободная поверхность  $AD$  прямолинейны (здесь нормальная скорость  $V_n = 0$ ); кроме того, переходная поверхность  $OA$  является плоской; пластическая область  $OABECD$  состоит из двух прямоугольных треугольников  $AOB$  и  $ACD$  равномерного напряженного состояния и центрированного веера  $ABC$ ; линия  $OBCD$  является жесткопластической границей; материал «набегает» на пластическую область со скоростью  $V$ ; нормальная скорость распространения линии  $OBCD$  равна нулю.

### 3.1. Диссипация энергии и поле деформаций в пластической области

Поле скоростей в пластической области определяется выражениями:

в области  $ACD$  ( $\varphi = \mu - \frac{\pi}{4}$ )

$$u^- = V \cos \varphi, \quad u^+ = -V \sin \varphi, \quad v^\pm = V \sin \varphi = V_n^\pm, \quad [V_\tau] = \sqrt{2}V \cos \mu; \quad (7)$$

в области  $ABC$  ( $\varphi \in [\mu - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} - \mu]$ )

$$u^- = -V \cos \varphi, \quad u^+ = -V \cos \varphi + \sqrt{2}V \cos \mu, \quad v^\pm = V \sin \varphi = V_n^\pm, \quad [V_\tau] = \sqrt{2}V \cos \mu; \quad (8)$$

в области  $AOB$  ( $\varphi = \frac{\pi}{4} - \mu$ )

$$u^- = -V \cos \varphi, \quad u^+ = V \sin \varphi, \quad v^\pm = V \sin \varphi = V_n^\pm, \quad [V_\tau] = \sqrt{2}V \cos \mu. \quad (9)$$

Здесь  $u, v$  – проекции скорости перемещения на криволинейные оси  $\alpha, \beta$  соответственно;  $V_n, [V_\tau]$  – нормальная составляющая и разрыв касательной составляющей скорости частиц на жесткопластической границе; знаки «+», «-» определяют значения компонент скорости выше и ниже жесткопластической границы  $OBCD$ ;  $\mu$  – угол режущего клина;  $\varphi$  – угол наклона  $\alpha$ -линии к оси  $x$ .

Соотношения (7)–(9) позволяют описать диссипацию энергии и компоненты тензора деформаций в частице вдоль траектории её движения в пластической области. В качестве меры деформаций выбран тензор конечных деформаций Альманси  $\mathbf{E}$ , связанный с компонентами тензора дисторсии  $\mathbf{A} = [a_{ji}] = [x_{i,j}^0]$  соотношениями

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - a_{ik}a_{jk}), \quad (10)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $x_i^0$  – лагранжевы координаты,  $x_i$  – эйлеровы координаты частицы. Согласно [20] в условиях плоской деформации компоненты тензора дисторсии  $\mathbf{A}$  являются решением системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_{11}}{\partial \varphi} f - a_{11} \sin \varphi \cos \varphi + a_{21} \cos^2 \varphi = 0, \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial \varphi} f - a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \cos^2 \varphi = 0, \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial \varphi} f - a_{11} \sin^2 \varphi + a_{21} \sin \varphi \cos \varphi = 0, \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi} f - a_{12} \sin^2 \varphi + a_{22} \sin \varphi \cos \varphi = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где  $f = \frac{u - a' \cos \varphi - b' \sin \varphi}{u + \frac{\partial v}{\partial \varphi}}$ ,  $a', b'$  – компоненты скорости движения центра веера характеристик  $ABC$ .

При движении частицы в пластической области выделяются семь участков траектории (см. рис. 4):

в недеформированном поверхностном слое (область 1) частица движется со скоростью  $V$ ; тензор дисторсии и тензор Альманси имеют вид  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ;

на жесткопластической границе 2 частица мгновенно деформируется и рассеивает на пластических деформациях конечную удельную работу внутренних сил  $W = \frac{[V_\tau]}{|V_n|}$  согласно (7); компоненты тензора дисторсии и тензора Альманси определяются в виде  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ W & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -W \\ -W & -W^2 \end{bmatrix}$ ;

в области 3 частица движется вдоль свободной поверхности  $OD$ , не деформируясь; значения компонент тензора дисторсии  $\mathbf{A}$  и тензора Альманси  $\mathbf{E}$  не изменяются;

в веере линий скольжения  $ABC$  (область 4) частица движется, деформируясь с максимальной скоростью сдвига  $\gamma_{max} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right)$ , и рассеивает удельную работу

$\frac{W}{2k} = \int_{t_0}^{t_k} \gamma_{max} dt$  согласно [21]; компоненты тензора дисторсии  $\mathbf{A}$  определяются как решение системы (11) согласно (8) при движении центра веера линий скольжения с нулевой скоростью (согласно предполагаемому полю скоростей в пластической области); главные значения тензора Альманси  $\mathbf{E}$  определяются согласно (10) соотношениями

$$E_1 = e + g, \quad E_2 = e - g, \quad (12)$$

где  $e = \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22})$ ,  $g = \frac{1}{2}\sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}$ ;

в области 5 частица движется вдоль контактной поверхности  $OA$ , не деформируясь; значения компонент тензора дисторсии  $\mathbf{A}$  и тензора Альманси  $\mathbf{E}$  не изменяются;

на жесткопластической границе 6 частица мгновенно деформируется и рассеивает удельную работу  $W = \frac{[V_\tau]}{|V_n|}$  согласно (9); компоненты тензора дисторсии определяются по формуле  $x_{i,j}^{0+} = (\delta_{ik} + W\tau_i\nu_k)x_{k,j}^{0-}$ ; главные значения тензора Альманси  $\mathbf{E}$  определяются согласно (12);

в деформированном поверхностном слое (область 7) частица движется со скоростью  $V$ .

На рис. 5 показано изменение удельной диссипации  $W$  работы внутренних сил на жесткопластической границе в зависимости от угла раствора клина  $\mu$ . На рис. 6 показаны изменения главных значений  $E_1, E_2$  в зависимости от угла раствора клина  $\mu$  на участках 2, 4, 6 траектории деформирования частицы в пластической области.

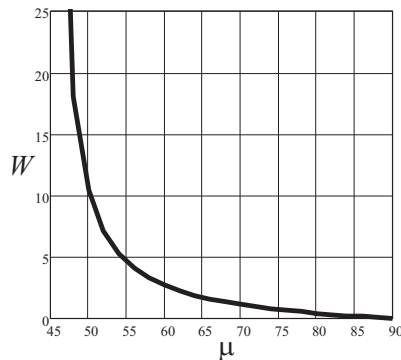


Рис. 5. Изменение удельной диссипации работы внутренних сил на жесткопластической границе в зависимости от угла раствора клина

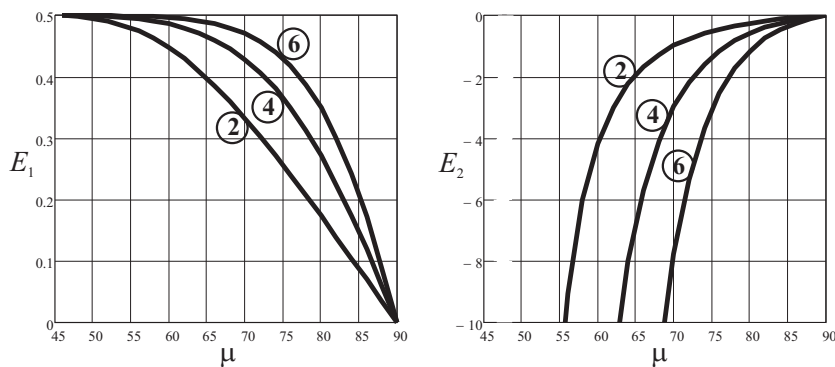


Рис. 6. Изменения главных значений тензора конечных деформаций Альманси в зависимости от угла раствора клина

Отметим, что для частиц, траектория которых проходит в окрестности точки  $E$  (см. рис. 3), однородность деформирования пропадает и существенно зависит от величины нормальной скорости частиц, которая при  $\varphi = 0$  равна нулю. Это приводит к возрастанию деформаций до критического значения  $E_1 = 0.5$  и к неограниченному возрастанию удельной работы внутренних сил, что, в свою очередь, приводит к нарушению сплошности материала (т.е. к разрушению). Это замечание указывает на возможность зарождения макротрещин в подповерхностном слое толщиной  $a_1$ .

Участки 2, 4, 6 являются активными участкам деформирования частицы вдоль траектории. Процессы деформирования на этих участках можно трактовать как



полуциклы жесткого деформирования в интервале начальных и конечных деформаций соответствующего этапа деформирования. Это означает, что в повреждении материала участвует не вся рассеянная энергия, а только её часть  $W_h$ , связанная с упрочнением. Эта часть энергии не может быть рассчитана в рамках идеально жесткопластического тела, но ее величина может быть получена из диаграммы  $\sigma - \delta$  по вычисленным значениям деформаций.

### 3.2. Алгоритм определения повреждаемости материала в поверхностном слое

Алгоритм определения части работы внутренних сил, оценивающей поврежденность конструкционного сплава ЭК79 в процессе выглаживания, представлен на графиках рис. 7.

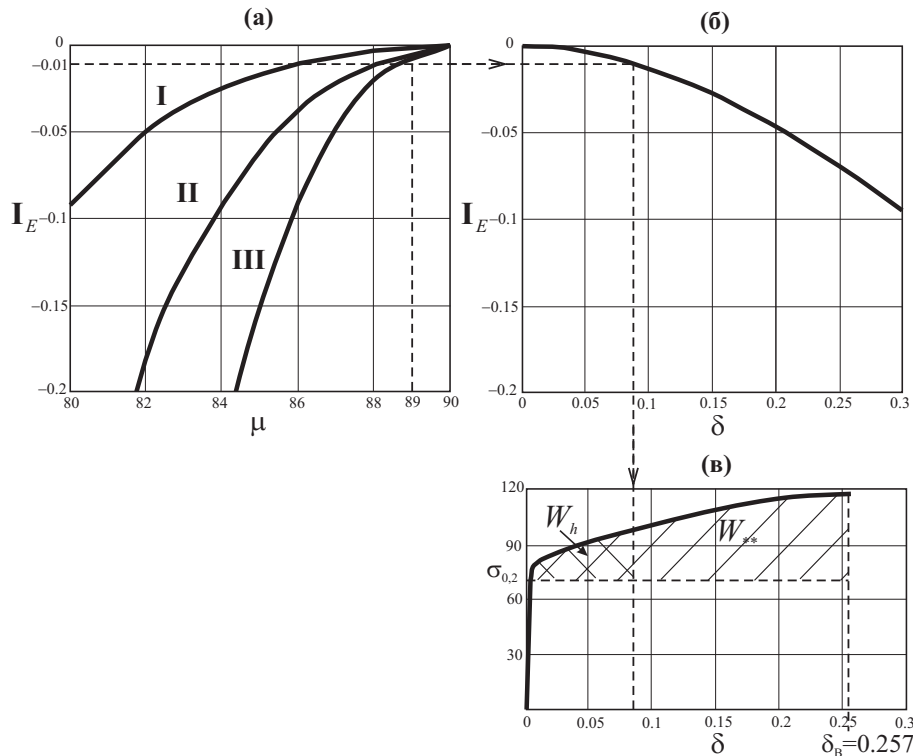


Рис. 7. Алгоритм определения части работы внутренних сил в процессе выглаживания

На графиках рис. 7 (а) показаны изменения параметра упрочнения  $I_E$  вдоль траектории движения частицы для различных углов  $\mu$ : линия I – на участке  $CD$ , линия II – в вереве  $BAC$ , III – на участке  $OB$ .

На графике рис. 7 (б) показана связь параметра упрочнения  $I_E$  с относительным удлинением  $\delta$  в эксперименте на одноосное растяжение цилиндрического образца.

На рис. 7 (в) представлена диаграмма нагружения.

Работы внутренних сил  $W_{**}$  и  $W_h$  определяются площадями (см. рис. 7, в) в полосе под статической диаграммой  $\sigma - \delta$  и  $\sigma_{0.2}$  по конечным деформациям частицы после пересечения пластической области.

Рассеиваемая работа внутренних сил при выглаживании вызывает повреждение и снижает способность материала упрочняться. Согласно (6) это приводит к уменьшению величины  $W_{**}$  на величину  $W_h$ , что соответствует уменьшению ресурса упрочнения материала. В рассмотренном примере угол клина принят равным  $\mu = 89^\circ$  и отношение площадей  $\frac{W_{**}}{W_h} \approx 5.6$ . Это означает, что ресурс материала в поверхностном слое исчерпан на  $\frac{1}{5.6} 100\% \approx 17.9\%$ .

## Заключение

1. Предложенный подход описания предельных состояний в пространствах главных напряжений и деформаций вместе с поверхностью нагружения учитывает эффект Баушингера и конечность деформаций материала.

2. Этот подход обобщает формулу Коффина–Мэнсона на произвольные пространственные процессы деформирования, включая повторно статические нагружения с произвольной формой цикла.

## Список литературы

- [1] Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев, “О форме предельной поверхности механического критерия прочности”, *Прикладная механика*, 4:3 (1968), 45–50.
- [2] И. И. Гольденблат, В. А. Кошнов, “Общая теория критериев прочности изотропных и анизотропных материалов”, *Проблемы прочности*, 1971, № 3, 65–69.
- [3] Г. А. Гениев, В. Н. Киссюк, Г. А. Тюпин, *Теория пластичности бетона и железобетона*, Стройиздат, М., 1974, 316 с.
- [4] Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин, Ю. Н. Радаев, С. И. Сенашов, Е. И. Шемякин, *Предельное состояние деформируемых тел и горных пород*, Физматлит, М., 2008, 832 с.
- [5] С. В. Серенсен, *В кн.: Термопрочность материалов и конструкционных элементов*, Наукова думка, К., 1967.
- [6] Е. П. Кочеров, А. И. Хромов, “Деформационные состояния и разрушение идеальных жесткопластических тел”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, 2006, № 42, 66–71.
- [7] А. И. Хромов, А. Л. Григорьева, Е. П. Кочеров, “Деформационные состояния и условия разрушения жесткопластических тел”, *Доклады Академии наук*, 413:4 (2007), 481–485.
- [8] А. А. Буханько, А. Л. Григорьева, Е. П. Кочеров, А. И. Хромов, “Деформационно-энергетический критерий разрушения жесткопластических тел”, *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 2009, № 6, 178–186.
- [9] L. F. Coffin, “A study of the effects of cyclic thermal stresses in ductile metals”, *Transaction of ASME*, 76 (1954), 931–950.
- [10] S. S. Manson, “Behavior of materials under conditions of thermal stress”, *Heat Transfer Symposium*, University of Michigan, Engineering Research Institute, 1953, 9–75.
- [11] Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский, Н. С. Антипов, *Сопротивление жаропрочных материалов нестационарным силовым и температурным воздействиям*, Наукова думка, Киев, 1974, 200 с.
- [12] Н. А. Махутов, *Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность*. Т. 1: *Критерии прочности и ресурса*, Наука, Новосибирск, 2005, 494 с.

- [13] В. Т. Трощенко, А. А. Лебедев, В. А. Стрижало и др., *Механическое поведение материалов при различных видах нагружения*, Логос, Киев, 2000, 571 с.
- [14] А. И. Хромов, О. В. Козлова, *Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения*, Дальнаука, Владивосток, 2005, 159 с.
- [15] С. Е. Feltner, J. D. Morrow, "Microplastic strain hysteresis energy as a criterion for fatigue fracture", *Basic Engineering. Transaction of ASME*, **83**:1 (1961), 15–22.
- [16] D. E. Martin, "An energy criterion for low-cycle fatigue", *Basic Engineering. Transaction of ASME*, **83**:4 (1961), 565–571.
- [17] Ю. Г. Егорова, С. А. Каверзина, А. И. Хромов, "Резание и разрушение идеальных жесткопластических тел", *Доклады Академии наук*, **385**:4 (2002), 490–493.
- [18] А. Н. Анисимов, А. И. Хромов, "Выглаживание жесткопластической поверхности клинообразным штампом при условии текучести Кулона-Мора", *Прикладная механика и техническая физика*, **51**:2 (2010), 293–298.
- [19] А. И. Хромов, А. А. Буханько, О. В. Козлова, С. Л. Степанов, "Пластические константы разрушения", *Прикладная механика и техническая физика*, 2006, № 2, 147–155.
- [20] А. А. Буханько, А. Ю. Лошманов, А. И. Хромов, "Расчет полей деформаций в задачах обработки материалов давлением при наличии особенностей поля скоростей перемещений", *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*, 2006, № 9, 22–27.
- [21] А. А. Буханько, Е. П. Кочеров, В. А. Самойлов, "Адиабатическое распределение диссипации энергии в окрестности центра веера характеристик", *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, 2009, № 2(19), 252–256.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 25 января 2013 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-08-00580-а)

---

*Khromov A. I., Bukhanko A. A., Ovchinnikova S. A.* Limiting state and low-cycle fatigue of plastic materials. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2013. V. 13. № 1. P. 148–158.

#### ABSTRACT

An approach to the description of the limiting states of material in spaces of principal stresses and strains is suggested. This approach generalizes the basic relations of low-cycle fatigue to the spatial deformation processes. In terms of the suggested approach the problem of surface burnishing of rigid-plastic material is considered.

Key words: *plasticity, strain, energy dissipation, limiting state, low-cycle fatigue*