Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 1. С. 52–60

УДК 512.643.5
MSC2010 15A18

© Е. А. Калинина[1]

Общие собственные числа двух матриц

В статье предлагается новый подход к нахождению общих собственных чисел двух матриц. Алгоритм основан на свойствах решений уравнения $AX = XB$ и на критерии наличия общих собственных чисел матриц в виде алгебраического уравнения относительно элементов этих матриц. Приводится метод построения полинома, корнями которого являются все общие собственные числа матриц A и B.

Ключевые слова: *общие собственные числа матриц, кронекеровское произведение.*

1. Введение

Известны и хорошо развиты методы, позволяющие найти общие корни двух полиномов. Эта задача решается в теории исключения [1, 2, 3]. Методы теории исключения применимы также и для систем алгебраических уравнений от нескольких переменных.

Проблема нахождения общих собственных чисел двух матриц, которая возникает в некоторых задачах обработки изображений, также разрешима с помощью методов теории исключения. Достаточно построить характеристические полиномы рассматриваемых матриц и найти общие корни этих полиномов. Однако вычисление коэффициентов характеристического полинома матрицы само по себе является довольно трудоемкой вычислительной задачей. Поэтому возникает вопрос о возможности нахождения общих собственных чисел двух матриц без построения характеристических полиномов.

Известны результаты, позволяющие определить, имеют ли две матрицы общие собственные числа [4, 5]. В книге [4] приводятся теоремы о разрешимости матричных уравнений, в статье [5] приведен результат, относящийся к матрицам Хессенберга. В работе [6] предлагается численный алгоритм, основанный на теореме Гершгорина и методе бисекций, с его помощью можно найти общие собственные числа двух матриц.

В данной статье рассматривается метод, позволяющий построить полином, корнями которого являются все общие собственные числа двух матриц.

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, 198504, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский просп., 35. Электронная почта: `ekalinina69@gmail.com`

2. Постановка задачи и предварительные результаты

Рассмотрим две квадратные матрицы $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ и $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m}$ с вещественными элементами. Требуется найти все (с учетом кратности) общие собственные числа матриц A и B.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ собственные числа матриц A и B соответственно.

В дальнейшем нам понадобятся понятия кронекеровского произведения матриц и инвариантных множителей матрицы, элементы которой — полиномы (или λ-матрицы).

Определение. Кронекеровским произведением матриц A и B называется матрица

$$A \otimes B_{mn\times mn} = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n}B \\ \ldots & & & \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \ldots & a_{nn}B \end{bmatrix}.$$

Пусть ранг λ-матрицы $M(\lambda)$ равен r. Обозначим через $D_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ наибольший общий делитель всех миноров порядка j матрицы $M(\lambda)$.

Утверждение. [7] *В ряду*

$$D_0(\lambda) \equiv 1, D_1(\lambda), \ldots, D_{r-1}(\lambda), D_r(\lambda)$$

каждый многочлен делится без остатка на предыдущий.

Обозначим, полученные в результате этого деления частные, через $E_{1M}(\lambda)$, $E_{2M}(\lambda), \ldots,$ $E_{rM}(\lambda)$:

$$E_{1M}(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} = D_1(\lambda), E_{2M}(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}, \ldots, E_{rM}(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}. \qquad (1)$$

Определение. [7] Многочлены $E_{1M}(\lambda), E_{2M}(\lambda), \ldots, E_{rM}(\lambda)$, определяемые формулами (1), называются инвариантными множителями матрицы $M(\lambda)$.

Теперь приведем известные результаты, которые будут использованы в дальнейшем.

Обозначим через $\mathcal{C}$ следующую квадратную матрицу порядка mn:

$$\mathcal{C} = A \otimes E_{m\times m} - E_{n\times n} \otimes B.$$

Здесь $E_{m\times m}$ и $E_{n\times n}$ — единичные матрицы порядков m и n соответственно.

Теорема 1. [4] *Матрицы A и B имеют хотя бы одно общее собственное число тогда и только тогда, когда* $\det \mathcal{C} = 0$.

Теорема 2. [4] *Собственные числа матрицы $\mathcal{C}$ равны $\lambda_j - \mu_k$, где $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$.*

Далее мы будем предполагать, что матрицы A и B имеют по крайней мере одно общее собственное число. Рассмотрим собственные векторы матрицы $\mathcal{C}$, соответствующие собственному числу 0. Каждый из этих векторов имеет mn компонент. Если его координаты разбить на m частей, в каждой из которых n компонент, и последовательно поставить по столбцам, то получится матрица X размерности $n \times m$, удовлетворяющая уравнению $AX = XB$.

Данное уравнение было исследовано Ф. Чечиони и Ф. Г. Фробениусом. Известны следующие теоремы.

Теорема 3. [4] *Уравнение $AX = XB$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда матрицы A и B имеют хотя бы одно общее собственное число.*

Теорема 4. [4] *Число линейно независимых решений уравнения $AX = XB$ равно $\sum e_{jk}$, где e_{jk} — степень наибольшего общего делителя инвариантного множителя $E_{jA}(\lambda)$ матрицы $A - \lambda E$ и инвариантного множителя $E_{kB}(\lambda)$ матрицы $B - \lambda E$.*

Замечание. Сумма берется по всем парам инвариантных множителей $E_{jA}(\lambda)$ и $E_{kB}(\lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots, m)$.

3. Обоснование алгоритма

Приведем здесь результаты, на которых основан рассматриваемый алгоритм нахождения общих собственных чисел двух матриц.

Лемма. *Если ненулевая матрица $X_{n\times m}$ одновременно удовлетворяет уравнениям*

$$AX = XB \text{ и } AX = \lambda X, \tag{2}$$

то ее ненулевые столбцы являются собственными векторами матрицы A, соответствующими собственному числу λ, а ненулевые строки (транспонированные) — собственными векторами матрицы B^T, соответствующими этому же собственному числу.

Замечание. Матрица X может иметь нулевые строки или столбцы.

Доказательство. Действительно, поскольку $AX = XB$, то заменим в равенстве $AX = \lambda X$ матрицу AX на равную ей матрицу XB. Получим

$$AX = XB = \lambda X,$$

откуда и следует требуемое. Лемма доказана. □

Пусть X_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ — векторы, образующие базис собственного пространства матрицы A, соответствующего собственному числу λ, Y_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ —

векторы, образующие базис собственного пространства матрицы B^T, соответствующего этому же собственному числу, $s = pq$.

Следствие. *Любая ненулевая матрица $X_{n\times m}$, являющаяся решением системы уравнений (2) для данного λ, имеет вид*

$$X = \gamma_1\mathfrak{X}_1 + \gamma_2\mathfrak{X}_2 + \ldots + \gamma_s\mathfrak{X}_s, \tag{3}$$

где $\mathfrak{X}_k = X_i Y_j^T$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ — некоторые вещественные числа.

Доказательство. Представление любого решения системы уравнений (2) в виде (3) получается разложением собственных векторов матриц A и B^T, соответствующих данному собственному числу λ, по базисам, состоящим из собственных векторов этих матриц.

Каждый столбец $X^{(j)}$ матрицы X представим в виде линейной комбинации p линейно независимых собственных векторов матрицы A, соответствующих собственному числу λ:

$$X^{(j)} = \alpha_{1j}X_1 + \alpha_{2j}X_2 + \ldots + \alpha_{pj}X_p, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Тогда матрицу X можно представить в виде

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_p)\mathfrak{A}, \text{ где } \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \ldots & & & \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \ldots & \alpha_{pm} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $AX = \lambda X = XB$, то получаем, что

$$(X_1, X_2, \ldots, X_p)(\lambda\mathfrak{A} - \mathfrak{A}B) = \mathbb{O}_{n\times m},$$

где $\mathbb{O}_{n\times m}$ — нулевая матрица размерности $n \times m$.

Так как векторы $X_1, X_2, \ldots, X_p$ линейно независимы, отсюда следует, что

$$\lambda\mathfrak{A} = \mathfrak{A}B,$$

т.е. транспонированные строки матрицы $\mathfrak{A}$ являются собственными векторами матрицы B^T. Раскладывая их по базису $Y_1^T, \ldots, Y_q^T$, получаем новое выражение для X:

$$X = (X_1, \ldots, X_p)\mathfrak{B}\begin{pmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \\ \ldots \\ Y_q^T \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы $\mathfrak{B} = [\mathfrak{b}_{kj}]$ $(k = 1, 2, \ldots, p, j = 1, 2, \ldots, q)$ — коэффициенты разложения:

$$(\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{km}) = \mathfrak{b}_{k1}Y_1^T + \mathfrak{b}_{k2}Y_2^T + \ldots + \mathfrak{b}_{kq}Y_q^T.$$

Теперь представим матрицу $\mathfrak{B}$ в виде суммы матриц $\mathfrak{b}_{kj}I_{kj}$, где I_{kj} — матрица размерности $p \times q$, у которой элемент, стоящий в k-й строке j-м столбце равен 1, а все остальные элементы нулевые.

Таким образом, требуемое разложение получено.

В том, что любая матрица вида (3) является решением системы уравнений (2), легко убедиться подстановкой матрицы в систему уравнений. Тем самым утверждение доказано. □

Теорема 5. *Для каждого общего собственного числа λ матриц A и B существует матрица D ранга 1 такая, что $AD = DB$, столбцы которой являются собственными векторами матрицы A, соответствующими собственному числу λ, а строки (транспонированные) — собственными векторами матрицы B^T, соответствующими тому же собственному числу.*

Доказательство. Пусть X — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ. Пусть Y — собственный вектор матрицы B^T, соответствующий собственному числу λ. Рассмотрим матрицу $D = XY^T$. Для этой матрицы имеем

$$AD = AXY^T = \lambda XY^T = \lambda D, DB = XY^TB = X\lambda Y^T = \lambda XY^T = \lambda D.$$

Теорема доказана. □

Следствие. *Для каждого общего собственного числа двух матриц λ имеется ровно s линейно независимых матриц ранга 1 рассмотренного вида (см. теорему 5).*

Доказательство. Рассмотрим s матриц $\mathfrak{X}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$. Все они удовлетворяют условию теоремы 5. Докажем, что эти матрицы линейно независимы.

Предположим, что какая-то линейная комбинация этих матриц равна нулю:

$$\beta_{11}X_1Y_1^T + \beta_{12}X_1Y_2^T + \ldots + \beta_{pq}X_pY_q^T = \mathbb{O}_{n\times m}.$$

Перепишем левую часть равенства, сгруппировав слагаемые с $X_1, X_2, \ldots, X_p$:

$$\begin{aligned}
&X_1(\beta_{11}Y_1^T + \beta_{12}Y_2^T + \ldots + \beta_{1q}Y_q^T)+\\
&+X_2(\beta_{21}Y_1^T + \beta_{22}Y_2^T + \ldots + \beta_{2q}Y_q^T)+\\
&+\ldots+\\
&+X_p(\beta_{p1}Y_1^T + \beta_{p2}Y_2^T + \ldots + \beta_{pq}Y_q^T) = \mathbb{O}_{n\times m}.
\end{aligned}$$

Поскольку векторы $X_1, \ldots, X_p$ линейно независимы, то каждый из векторов, записанных в скобках, равен нулю. Отсюда, вследствие линейной независимости векторов $Y_1, \ldots, Y_q$, получаем равенство нулю всех коэффициентов β_{jk} $(j = 1, 2, \ldots, p; k = 1, 2, \ldots, q)$. Тем самым утверждение доказано. □

Пусть матрица $\mathcal{C}$ имеет l линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному числу 0. Обозначим эти векторы через $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_l$. Составим из них матрицу $\mathfrak{C}_{mn\times l} = (\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_l)$.

Теорема 6. *Общие собственные числа матриц A и B являются корнями полинома*

$$\det \mathfrak{X}(\lambda) = \det(\mathfrak{C}^T(A \otimes E_{m\times m})\mathfrak{C} - \lambda \mathfrak{C}^T\mathfrak{C}) = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Поскольку матрица D, столбцы которой являются собственными векторами матрицы A, соответствующими собственному числу λ, а строки (транспонированные) — собственными векторами матрицы B^T, соответствующими λ, удовлетворяет уравнению $AX = XB$, то она является линейной комбинацией l матриц, составленных из координат векторов $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_l$. Иначе говоря, для каждого общего собственного числа λ существует матрица D, соответствующая вектору

$$\alpha_1\mathfrak{C}_1 + \alpha_2\mathfrak{C}_2 + \ldots + \alpha_l\mathfrak{C}_l,$$

такая, что $AD = \lambda D$. Перепишем это уравнение иначе, записав матрицу D как вектор:

$$(A \otimes E_{m\times m})\mathfrak{C}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_l\end{pmatrix} = \lambda\mathfrak{C}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_l\end{pmatrix}.$$

Каждое решение данной системы уравнений является решением системы линейных уравнений

$$(\mathfrak{C}^T(A \otimes E_{m\times m})\mathfrak{C} - \lambda\mathfrak{C}^T\mathfrak{C})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_l\end{pmatrix} = \mathbb{O}_{l\times l},$$

где $\mathbb{O}_{l\times l}$ — нулевая матрица порядка l.

Других решений эта система не имеет, поскольку общих собственных чисел у матриц A и B больше, чем l, быть не может (ранг матрицы $\mathfrak{C}$ равен l). Для того чтобы данная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель ее матрицы был равен нулю, откуда и получаем утверждение теоремы. □

Следствие. *Кратность каждого корня полинома* $\det(\mathfrak{X}(\lambda))$ *равна* $\sum d_{ij}$, *где* d_{ij} *— наименьший из показателей степеней, в которых линейный множитель, соответствующий данному корню, входит в разложение инвариантных множителей* $E_{iA}(\lambda)$ *матрицы* $A - \lambda E$ *и* $E_{jB}(\lambda)$ *матрицы* $B - \lambda E$.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 4 и того факта, что корни каждого инвариантного множителя матрицы $A - \lambda E$ являются собственными числами матрицы A (аналогично для матрицы B). Последнее следует из того, что все наибольшие общие делители миноров матрицы $A - \lambda E$ имеют корнями собственные числа матрицы A (характеристический полином матрицы A, являющийся наибольшим общим делителем миноров порядка n матрицы $A - \lambda E$, делится на наибольший общий делитель миноров произвольного порядка этой матрицы). $\square$

Замечание. Мы находили уравнение для общих собственных чисел матриц A и B, используя матрицу A. Можно составить аналогичное уравнение и с помощью матрицы B. Оно будет иметь вид

$$\det \mathfrak{X}(\lambda) = \det(\mathfrak{C}^T(E_{n\times n} \otimes B)\mathfrak{C} - \lambda \mathfrak{C}^T\mathfrak{C}) = 0.$$

Однако это уравнение в точности совпадает с уравнением (4). Действительно, $\mathcal{C} = A \otimes E_{m\times m} - E_{n\times n} \otimes B$, а матрица $\mathfrak{C}$ удовлетворяет условию $\mathcal{C}\mathfrak{C} = \mathbb{O}_{mn\times l}$ (по столбцам матрицы $\mathfrak{C}$ стоят собственные векторы матрицы $\mathcal{C}$, соответствующие собственному числу 0). Отсюда сразу следует, что

$$\mathfrak{C}^T(E_{n\times n} \otimes B)\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^T(A \otimes E_{m\times m})\mathfrak{C}.$$

4. Алгоритм

Приведем теперь алгоритм построения многочлена, корнями которого являются общие собственные числа двух данных матриц $A_{n\times n}$ и $B_{m\times m}$, не требующий вычисления коэффициентов их характеристических полиномов.

1. Строим матрицу

$$\mathcal{C} = A \otimes E_{m\times m} - E_{n\times n} \otimes B$$

и вычисляем ее определитель. Если $\det \mathcal{C} \neq 0$, то матрицы одинаковых собственных чисел не имеют.

2. Находим собственные векторы матрицы $\mathcal{C}$, соответствующие собственному числу 0: $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_l$.

3. Находим требуемый полином:

$$\det \mathfrak{X}(\lambda) = \det(\mathfrak{C}^T(A \otimes E_{m\times m})\mathfrak{C} - \lambda \mathfrak{C}^T\mathfrak{C}).$$

Корни данного полинома относительно λ можно найти любым численным методом.

Замечание. Этот алгоритм применим также и в случае матриц A и B с комплексными элементами. Единственное отличие состоит в том, что уравнение для нахождения общих собственных чисел матриц A и B принимает следующий вид:

$$\det(\overline{\mathfrak{C}}^T(A \otimes E_{m\times m})\mathfrak{C} - \lambda \overline{\mathfrak{C}}^T\mathfrak{C}) = 0,$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение.

5. Пример

Найдем общие собственные числа матриц

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Построим матрицу $\mathcal{C} = A \otimes E_{4\times 4} - E_{5\times 5} \otimes B$ и найдем ее определитель:

$$|\mathcal{C}| = \begin{vmatrix}
0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1
\end{vmatrix} = 0.$$

Находим собственные векторы матрицы $\mathfrak{C}$, соответствующие собственному числу 0:

$$\mathfrak{C}_1 = (4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$
$$\mathfrak{C}_2 = (-3, -2, -3, -3, -2, -1, -2, -2, -1, 0, -1, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$
$$\mathfrak{C}_3 = (3, 3, 1, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$
$$\mathfrak{C}_4 = (-3, -3, 0, 1, -2, -2, 0, 1, -1, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T.$$

Составляем матрицу $\mathfrak{X}(\lambda)$ и находим ее определитель:

$$|\mathfrak{X}(\lambda)| = \begin{vmatrix} 44-72\lambda & -28+56\lambda & 24-40\lambda & -12+28 \\ -36+56\lambda & 28-48\lambda & -20+28\lambda & 8-16\lambda \\ 24-40\lambda & -12+28\lambda & 20-32\lambda & -16+28\lambda \\ -20+28\lambda & 8-16\lambda & -16+28\lambda & 20-32\lambda \end{vmatrix} = 10496(1-\lambda)^4.$$

Отсюда следует, что матрицы A и B имеют общее собственное число $\lambda = 1$.

Проверка. Собственные числа матрицы A равны 1 (кратности 4) и 2, матрица B имеет единственное собственное число 1 кратности 4.

Автор благодарит рецензента за ценные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

Список литературы

[1] М. Бохер, *Введение в высшую алгебру*, ГТТИ, М.-Л., 1933.

[2] Э. Джури, *Инноры и устойчивость динамических систем*, Наука, М., 1979.

[3] Е. А. Калинина, А. Ю. Утешев, *Теория исключения. Учеб. пособие*, НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2002.

[4] C. C. MacDuffee, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, N.-Y., 1956.

[5] K. Datta, “An algorithm to determine if two matrices have common eigenvalues”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **27**:5 (1982), 1131–1133.

[6] T. D. Roopamala, S. K. Katti, “New Approach to Identify Common Eigenvalues of real matrices using Gerschgorin Theorem and Bisection method”, *(IJCSIS) International Journal of Computer Science and Information Security*, **7**:2 (2010).

[7] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1967.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 28 мая 2012 г.

Kalinina E. A. Common eigenvalues of two matrices. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 1. P. 52–60.

ABSTRACT

A new approach to determine common eigenvalues of two matrices is proposed. The algorithm is based on the criteria for the existence of common eigenvalues of matrices in the form of algebraic equation depending on their elements and on the properties of solutions of the matrix equation $AX = XB$. The method for constructing a polynomial whose roots equal to the common eigenvalues of matrices A and B is presented.

Key words: *common eigenvalues of two matrices, Kronecker product.*