

© Г. М. Севастьянов¹

Об одном способе задания определяющих зависимостей «напряжения – скорости деформаций» в условиях активного пластического течения по опытным данным

Предложена модификация модели, на основе экспериментальных данных описывающей высокотемпературную деформацию металлов с ограниченным упрочнением материала при возрастании интенсивности скоростей деформаций сдвига. Предложенный вариант существенно улучшает точность модели. Аналитическое моделирование проведено с помощью программной реализации одной разновидности генетического алгоритма.

Ключевые слова: *вязкопластическое течение, высокотемпературное деформирование металлов, аналитическая модель, генетические алгоритмы.*

В работе [1] для описания процессов высокотемпературной деформации металлов строится модель вязкопластического течения (в предположении пластической несжимаемости материала с ограниченным упрочнением). Уравнение состояния в этой модели таково:

$$\sigma_{ij} - \sigma \cdot \delta_{ij} = 2 \cdot \frac{T}{H} \cdot \zeta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad T \geq \tau_s, \quad (1)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, $\sigma = \sigma_{ii}/3$ – гидростатическое напряжение, ζ_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций, T – интенсивность касательных напряжений, $H = \sqrt{2 \cdot \zeta_{ij} \cdot \zeta_{ij}}$ – интенсивность скоростей деформаций сдвига, τ_s – предел текучести на сдвиг. В работе представлена аналитическая зависимость $T = T(H, \theta, \varepsilon)$ в виде

$$T = \left[\tau_0 \cdot \left(\frac{1000}{\theta} \right)^2 - \tau_1 \right] \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 \cdot \frac{H^{k_0 \cdot \frac{\theta}{1000} - k_1}}{1 + H^{k_0 \cdot \frac{\theta}{1000} - k_1}} \quad (2)$$

где θ – температура среды, $\varepsilon = (\sqrt{2 \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}}) / \sqrt{3}$ – степень деформации, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций; τ_0 , τ_1 , ε_0 , k_0 , k_1 – коэффициенты, зависящие от марки стали.

Коэффициенты формулы (2) найдены по экспериментальным данным П. М. Кука [2] для ряда марок стали, формула даёт хорошую (около 10%) среднюю величину относительной погрешности $|1 - T_f/T_e|$ для $\theta \in [900; 1200]$, $\varepsilon \in [0.1; 0.6]$, $H \in [3\sqrt{3}/2; 100\sqrt{3}]$. Однако для некоторых сочетаний указанных параметров отклонение $|1 - T_f/T_e|$ значений T_f , рассчитанных по формуле, от экспериментальных значений T_e , достигает 30%, что существенно ограничивает применимость этой формулы. В данной работе для уравнения состояния (1) предлагается аналитическая зависимость $T = T(H, \theta, \varepsilon)$:

$$T = \left[\tau_0 \cdot \left(\frac{1000}{\theta} \right)^2 - \tau_1 \right] \cdot \sum_{i=1}^6 x_i \cdot \varepsilon^{\frac{i-1}{2}} / \left[1 + \left(\frac{H_0}{H} \right)^{k_0 \cdot \frac{\theta}{1000} - k_1} \right], \quad (3)$$

¹Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1. Электронная почта: akela.86@mail.ru

где τ_0, τ_1, x_i ($i = \overline{1,6}$), k_0, k_1, H_0 – коэффициенты, зависящие от марки стали.

Очевидно, что формула (3) принципиально не может дать худшее аналитическое описание экспериментальных данных, чем (2), так как класс функций $T = T(H, \theta, \varepsilon)$, описываемый (3), полностью включает в себя класс функций, описываемый (2), при предположении искомых коэффициентов в обеих формулах свободными. Будет ли формула (3) более точной, зависит от правильного подбора коэффициентов.

Задачу нахождения коэффициентов формулы (3) будем решать с помощью алгоритма эволюционной оптимизации – генетического алгоритма разновидности, приведённой в [3].

Суть алгоритма состоит в следующем. Из определённого заранее гиперпараллелепипеда случайным образом выбирается n точек, образующих стартовое поколение, n – величина популяции (для рассматриваемой задачи $n = 150$). Каждая точка этого пространства задаёт вектор-хромосому из чисел с плавающей точкой $V^{(i)} = \{\tau_0^{(i)}, \tau_1^{(i)}, x_p^{(i)}, H_0^{(i)}, k_0^{(i)}, k_1^{(i)}\}$, $i = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, 6}$.

Вводятся две генетические операции: кроссинговер и мутация. Первая представляет собой скрещивание двух хромосом. Каждая пара хромосом, подвергшаяся операции кроссинговера, порождает пару хромосом по следующему принципу. Пусть в операции участвуют вектор-хромосомы под номерами $n1$ и $n2$: $V^{(n1)}$ и $V^{(n2)}$, координаты этих векторов для простоты обозначим $V_j^{(n1)}$ и $V_j^{(n2)}$, $j = \overline{1, 11}$. Тогда результатом операции будет пара хромосом с координатами $c \cdot V_j^{(n1)} + (1 - c) \cdot V_j^{(n2)}$, $j = \overline{1, 11}$ и $(1 - c) \cdot V_j^{(n1)} + c \cdot V_j^{(n2)}$, $j = \overline{1, 11}$ соответственно, где c – случайное число, равномерно распределённое в интервале $(0; 1)$. Операция мутации задаётся так, что выбранная вектор-хромосома $V^{(n1)}$ посредством мутации порождает хромосому с координатами $V_j^{(n1)} + C_j$, $j = \overline{1, 11}$, C – вектор мутации со случайными компонентами. Параметры генетической системы p_C и p_M – вероятность кроссинговера и мутации соответственно принимались $p_C = 0.6$ и $p_M = 0.1$.

Чтобы выявить родительские хромосомы для операции кроссинговера, выполняется следующая процедура, повторяющаяся для каждой хромосомы популяции: формируется случайное действительное число r из сегмента $[0; 1]$, и, если $r < p_C$, то хромосома выбирается как родительская. Аналогичная процедура выполняется для того, чтобы выявить хромосомы, подверженные мутации. Стоит отметить, что в общем случае после действия генетических операторов на хромосомы следует проверять допустимость образованных хромосом-потомков, однако в нашем случае единственное ограничение, накладываемое на вектор решения – неотрицательность компоненты $H_0^{(i)}$ вектора $V^{(i)}$. Это условие легко можно исключить, заменив в формуле (3) коэффициент H_0 на $|H_0|$, что позволит избежать лишней здесь процедуры проверки допустимости хромосом.

Решение задачи определения коэффициентов формулы (3) состоит в минимизации некоторого количественного критерия степени отличия расчётов, проведённых по формуле, от экспериментальных данных, (функционала невязки). Этот функционал выступает в генетической системе в качестве целевой функции. Наиболее частым является использование функционала вида $\sum_{i=1}^m (1 - T_f^{(i)} / T_e^{(i)})^2 / m$, где m – число экспериментальных точек. В данной

работе, однако, использовался другой функционал: $\sum_{i=1}^m (10^{7 \cdot |1 - T_f^{(i)} / T_e^{(i)}|} - 1) / m$. Это основано на следующих соображениях. На поздних поколениях значения целевой функции, если использовать в качестве таковой упомянутый функционал метода наименьших квадратов, для большинства вектор-хромосом стремятся к нулю и укладываются в узкий интервал, что затрудняет сходимость алгоритма. Кроме того, число m в рассматриваемой задаче велико ($m = 96$ для каждого из трёх рассматриваемых типов сталей) и какое-либо большое отклонение $\max_{i=1, m} |1 - T_f^{(i)} / T_e^{(i)}|$ может нивелироваться небольшими значениями относительных отклонений в других экспериментальных точках. Решением проблемы может стать введе-

ние весовых коэффициентов для значений $(1 - T_f^{(i)} / T_e^{(i)})$ или, в более общем виде, введение этих значений в функционал невязки в качестве аргумента некоторой быстро возрастающей в окрестности нуля функции, причем не квадратичной, как в упомянутом функционале, и вообще не степенной, а, например, показательной с большим основанием.

После модификации поколения генетическими операторами хромосомы упорядочиваются по значению целевой функции от лучшей к худшей, далее происходит выборка хромосом в следующее поколение в соответствии с принятой фитнес-функцией $Eval(V^{(i)}) = a \cdot (1 - a)^{i-1}$, где $a \in (0; 1)$ – параметр генетической системы (в рассматриваемой задаче $a = 0.05$). Таким образом, хромосомы с более низким значением целевой функции будут иметь больше шансов быть отобранными в следующее поколение, однако вероятность воспроизведения конкретной хромосомы задается не из фактического значения целевой функции для неё, а на основании некоторого ранжирования.

Сама процедура отбора происходит по следующей системе: случайным образом формируется действительное число $r \in (0; \sum_{i=1}^n Eval(V^{(i)})]$, далее определяется минимальный номер

$j, j = \overline{1, n}$, который удовлетворяет условию: $\sum_{i=1}^j Eval(V^{(i)}) \geq r$; хромосома с номером j отбирается в следующее поколение. Процедура проводится n раз, таким образом, на каждом поколении размер популяции в этой генетической системе сохраняется постоянным.

На каждом поколении до и после действия генетических операторов запоминается лучшая хромосома. По прошествии достаточного числа поколений (в рассматриваемой задаче число поколений составило 500) генетический алгоритм останавливается и лучшая хромосома предьявляется как решение задачи оптимизации.

Описанный алгоритм реализован в среде Borland C++ Builder 6.0. В таблице приведены результаты решения задачи минимизации: лучшие векторы коэффициентов для каждого из трех видов сталей, а также средние и максимальные относительные погрешности (обозначены соответственно СОП = $\sum_{i=1}^m |1 - T_f^{(i)} / T_e^{(i)}| / m$, МОП = $\max_{i=\overline{1, n}} |1 - T_f^{(i)} / T_e^{(i)}|$) формулы (3) с использованием полученных вектор-хромосом в качестве коэффициентов.

Таблица. Результаты решения

Класс стали	τ_0, τ_1	$x_i, i = \overline{1, 6}$	H_0	k_0, k_1	СОП	МОП
Низко-углеродистая	5.8296	1.5239	7.1893	0.7811	3.57	14.79
	1.6168	4.1698				
		0.3851				
		1.8211				
		-4.4445				
		-1.4069				
Средне-углеродистая	3.4806	3.4328	7.7030	0.3826	3.26	10.62
	1.0229	7.2001				
		0.4478				
		-3.6280				
		-1.8049				
		-0.6830				
Высоко-углеродистая	5.2258	3.1830	7.0356	0.5812	3.79	13.76
	1.8759	3.2672				
		-0.4707				
		1.0699				
		-0.8759				
		-3.9264				

На рисунке представлена общая для трех классов сталей гистограмма распределения частот попадания величины T_f/T_e в различные интервалы.

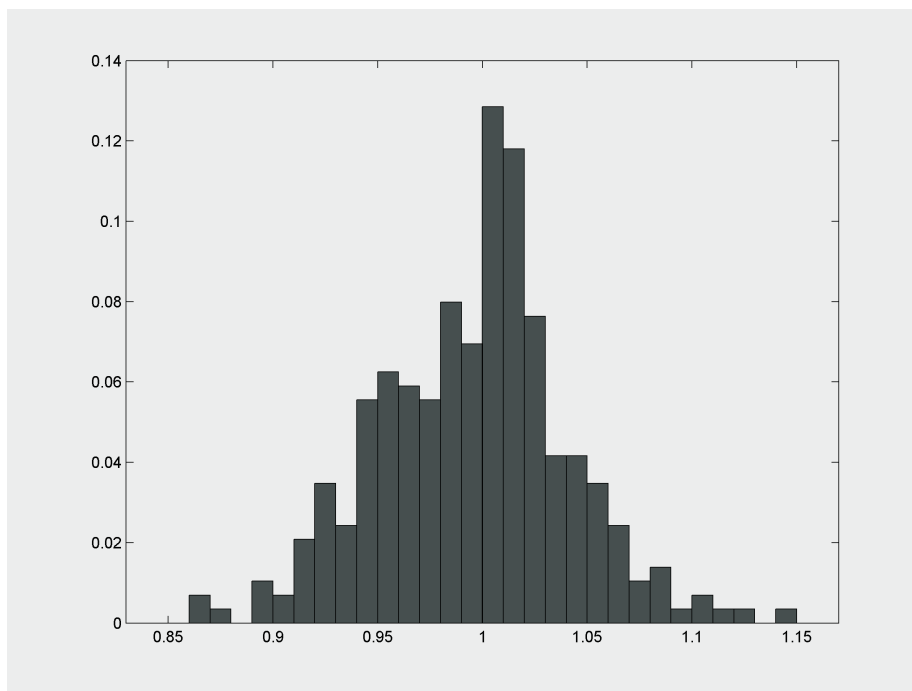


Рисунок. Гистограмма распределения значений T_f/T_e

В результате получена аналитическая зависимость $T = T(H, \theta, \varepsilon)$ для трех классов сталей, пригодная для $\theta \in [900; 1200]$, $\varepsilon \in [0.1; 0.6]$, $H \in [3\sqrt{3}/2; 100\sqrt{3}]$, максимальная относительная погрешность которой составляет менее 15%, средняя относительная погрешность – около 3.5%. Эти три типа сталей выбраны для иллюстрации, так как по ним имеются данные опытов $T(H, \theta, \varepsilon)$ в широком диапазоне деформаций. Аналогичные зависимости можно построить для других сталей при наличии достаточного количества экспериментальных данных.

Список литературы

- [1] В. И. Одинокоев, Б. Г. Каплунов, А. В. Песков, А. А. Баков, *Математическое моделирование сложных технологических процессов*, Наука, М., 2008, 176 с.
- [2] Е. С. Рокотян, *Прокатное производство. Справочник*, Металлургиздат, М., 1962.
- [3] Баодин Лю, *Теория и практика неопределенного программирования*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2005, 416 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 20 октября 2010 г.

Sevastyanov G. M. About a method of constitutive relations «tensions – deformation rates» definition at intensive afterflow conditions by experimental data. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 1. P. 88–92.

ABSTRACT

A modification of a model, which describe high-temperature metal deformation with limited strain hardening, is introduced by experimental data. That variant improved model accuracy. An analytical modeling was conduct with a genetic algorithm realisation.

Key words: *viscoelastic flow, high-temperature metal deformation, analytical model, genetic algorithm.*