*ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ.* 2010. Том 10. № 2. С. 93–105

УДК 517.95
MSC2000 76D55

© И.С. Вахитов*

# Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии – реакции

Сформулирована обратная экстремальная задача восстановления старшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения, исследована ее разрешимость, обосновано применение принципа неопределенных множителей Лагранжа и построена система оптимальности для конкретного функционала качества. Исследована единственность решения экстремальной задачи. Разработан на основе метода Ньютона и реализован численный алгоритм, проведены и проанализированы вычислительные эксперименты.

Ключевые слова: *эллиптическое уравнение, задача идентификации, старший коэффициент, метод Ньютона, единственность.*

## 1. Введение

В последнее время все большее внимание исследователей привлекают обратные и некорректные задачи. К ним относят задачи идентификации неизвестных плотностей источников и коэффициентов, входящих в рассматриваемые модели. Исследование коэффициентных обратных задач часто сводится к исследованию соответствующих экстремальных задач при определенном выборе функционала качества. Это позволяет применять для их решения хорошо развитые методы условной оптимизации, которые использовались многими авторами при исследовании коэффициентных обратных задач для дифференциальных уравнений (см. например [1, 2]). Отметим также работы [3, 4], в которых на основе данного подхода, применяя квазиньютовский или градиентный метод, разработаны численные алгоритмы решения задачи идентификации младшего коэффициента для уравнения конвекции – диффузии – реакции. В [5, 6, 7, 8] рассмотрены задачи восстановления старших коэффициентов для эллиптических и параболических уравнений. Отметим также цикл работ [9, 10, 11, 12, 13, 14], посвященный теоретическому и численному исследованию обратных экстремальных задач для нелинейных моделей тепломассопереноса.

Целью настоящей работы является теоретический и численный анализ решения обратной экстремальной задачи идентификации старшего коэффициента эллиптического уравнения диффузии – реакции, рассматриваемого в ограниченной области $\Omega$, по дополнительным измерениям в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$. В работе исследуется разрешимость и единственность рассматриваемой обратной экстремальной задачи, обосновывается применение принципа неопределенных множителей Лагранжа, выводится система оптимальности. Используя свойства системы оптимальности, разрабатывается численный алгоритм, основанный на методе Ньютона. В заключение приводятся результаты проведенных вычислительных экспериментов и дается их анализ.

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: iv7180@gmail.com

## 2. Постановка прямой задачи

Пусть $\Omega$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\Gamma$. Рассмотрим в $\Omega$ задачу нахождения концентрации $\varphi$ из соотношений

$$-\operatorname{div}(\lambda\nabla\varphi) + \kappa\varphi = f,\ \varphi|_\Gamma = \psi. \tag{1}$$

Здесь $\lambda \equiv \lambda(\mathbf{x}) > 0$ – коэффициент диффузии, зависящий от точки $\mathbf{x} \in \Omega$, который принято называть старшим коэффициентом уравнения (1); $\kappa \equiv \kappa(\mathbf{x}) \geq 0$ – величина, называемая младшим коэффициентом, которая характеризует распад загрязняющего вещества за счет химических реакций; $f(\mathbf{x})$ – плотность объемных источников; $\psi(\mathbf{x})$ – заданная на $\Gamma$ функция.

При теоретическом анализе краевой и обратной экстремальной задачи для (1) будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь $D$ обозначает либо область $\Omega$, либо границу $\Gamma$, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$. Через $\|\cdot\|_s$ и $|\cdot|_s$ будем обозначать норму и полунорму в $H^s(\Omega)$. Отношение двойственности между пространством $X$ и пространством $X^*$ будем обозначать через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ либо просто $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Положим $L^2_+(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : q \geq 0\}$. Через $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ обозначим оператор следа, через $R_\gamma : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ – непрерывный правый обратный оператор к $\gamma$, для которого выполняется соотношение $\gamma \circ R_\gamma\psi = \psi$ для всех $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Отметим, что в силу теоремы о следах, с некоторой константой $C_\gamma$, зависящей от $\Omega$, выполняется неравенство $\|R_\gamma\psi\| \leq C_\gamma\|\psi\|$ для всех $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Введем пространство $\mathcal{T} = H^1_0(\Omega) \equiv \{\eta \in H^1(\Omega) : \eta = 0 \text{ на } \Gamma\}$, $\mathcal{T}$ – гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_\mathcal{T} = \|\cdot\|_1$, эквивалентной полунорме $|\cdot|_1$ в силу справедливости неравенства Фридрикса – Пуанкаре́ $|\eta|_1^2 \geq \delta_1\|\eta\|_1^2$ для всех $\eta \in \mathcal{T}, \delta_1 = \text{const} > 0$. Через $\mathcal{T}^* \equiv H^{-1}(\Omega)$ обозначим пространство, двойственное к $\mathcal{T}$ относительно пространства $L^2(\Omega)$. Введем билинейные формы $a, a_\lambda : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, которые определяются соотношениями

$$a_\lambda(\varphi,\eta) = \int_\Omega \lambda\nabla\varphi\cdot\nabla\eta d\mathbf{x},\ a(\varphi,\eta) = a_\lambda(\varphi,\eta) + (\kappa\varphi,\eta). \tag{2}$$

Будем предполагать, что выполняются условия:

(i) $\Gamma \in C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma), \kappa \in L^2_+(\Omega)$;

(ii) $\lambda \in \Lambda = \{\lambda : \lambda \in H^2(\Omega), \lambda \geq \lambda_{min} > 0\}$.

Легко проверить (см. [15]), что при выполнении условий на $\lambda$ и $\kappa$ в (i), (ii), для форм, определенных формулами (2), для всех $\varphi, \eta \in H^1(\Omega)$ выполняются следующие соотношения:

$$|a_\lambda(\varphi,\eta)| = |\int_\Omega \lambda\nabla\varphi\cdot\nabla\eta d\mathbf{x}| \leq \gamma_0\|\lambda\|_2|\varphi|_1|\eta|_1 \leq \gamma_0\|\lambda\|_2\|\varphi\|_1\|\eta\|_1,\ \gamma_0 = \text{const}, \tag{3}$$

$$|(\kappa\varphi,\eta)| \leq \|\kappa\|\|\varphi\|_{L^4(\Omega)}\|\eta\|_{L^4(\Omega)} \leq \gamma_1\|\kappa\|\|\varphi\|_1\|\eta\|_1,\ \gamma_1 = \text{const}, \tag{4}$$

$$a_\lambda(\varphi,\varphi) \geq \lambda_{min}|\varphi|_1^2 \geq \lambda_{min}\delta_1\|\varphi\|_1^2,\ (\kappa\varphi,\varphi) \geq 0\ \forall\varphi \in \mathcal{T}, \kappa \in L^2_+(\Omega), \tag{5}$$

$$a(\varphi,\varphi) = a_\lambda(\varphi,\varphi) + (\kappa\varphi,\varphi) \geq \lambda_{min}\delta_1\|\varphi\|_1^2\ \forall\varphi \in \mathcal{T}. \tag{6}$$

Кроме того, справедливы следующие оценки:

$$\|\varphi\|_Q \leq \gamma_2\|\varphi\|_1,\ |(\varphi,\eta)_Q| \leq \|\varphi\|_Q\|\eta\|_Q \leq \gamma_2^2\|\varphi\|_1\|\eta\|_1,\ \gamma_2 = \text{const}. \tag{7}$$

Здесь $\gamma_0$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ — некоторые константы, зависящие от $\Omega$, но не зависящие от оцениваемых величин. Из соотношений (3) — (6)вытекает, что форма $a(\cdot,\cdot)$ непрерывна на $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ и $\mathcal{T}$-коэрцитивна с константой $\lambda_* = \lambda_{min}\delta_1$, так что выполняются неравенства

$$|a(\varphi,\eta)| \leq (\gamma_0\|\lambda\|_2 + \gamma_1\|\kappa\|)\|\varphi\|_1\|\eta\|_1,\quad a(\eta,\eta) \geq \lambda_*\|\eta\|_1^2\ \ \forall(\varphi,\eta) \in H^1(\Omega)\times\mathcal{T}. \tag{8}$$

Умножим уравнение в (1) на функцию $h \in \mathcal{T}$ и проинтегрируем по $\Omega$. Используя определения (2) и формулу Грина (см. [15, с. 50])

$$\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{u}\eta dx = -\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla \eta dx \ \ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ с } \mathrm{div}\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega), \eta \in H_0^1(\Omega) \tag{9}$$

при $\mathbf{u} = \lambda \nabla \varphi$, приходим к слабой формулировке задачи (1). Она заключается в нахождении функции $\varphi \in H^1(\Omega)$ из условий

$$a(\varphi, h) = (f, h), \ \ \varphi|_\Gamma = \psi. \tag{10}$$

Слабым решением задачи (1) назовем функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую (10). Из теоремы Лакса – Мильграма вытекает в силу выполнения (8) следующая лемма.

**Лемма 2.1.** *При выполнении условий (i), (ii) существует единственное решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ задачи (10) и справедлива оценка*

$$\|\varphi\|_1 \le M_\varphi \equiv \frac{1}{\lambda_*}[\|f\| + (\lambda_* + \gamma_0\|\lambda\|_2 + \gamma_1\|\kappa\|)C_\gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma}]. \tag{11}$$

Поставим в соответствие задаче (10) оператор, представляющий собой пару

$$(A, \gamma) : X \to Y, \ \ X = H^1(\Omega), \ \ Y = (\mathcal{T}^*, H^{1/2}(\Gamma)), \tag{12}$$

состоящую из оператора $A : H^1(\Omega) \to \mathcal{T}^*$, действующего по формуле

$$\langle A\varphi, \eta\rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} = a(\varphi, \eta) \ \forall \varphi \in H^1(\Omega), \ \ \eta \in \mathcal{T}, \tag{13}$$

и оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$. Из свойств непрерывности и коэрцитивности формы $a$ вытекает, что сужение оператора $A|_\mathcal{T} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^*$ на $\mathcal{T}$ является изоморфизмом.

Рассмотрим свойства оператора (12). Он линеен и непрерывен в силу линейности и непрерывности операторов $A$ и $\gamma$. Кроме того, из леммы 2.1 вытекает, что оператор (12) обратим и сюръективен. Отсюда, используя теорему Банаха о существовании обратного оператора, получаем, что оператор (12) непрерывно обратим и осуществляет изоморфизм. Этот факт сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.1.** *Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда 1) билинейная форма $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\mathcal{T}$ – коэрцитивна с константой $\lambda_*$; 2) для любой функции $\lambda \in \Lambda$ задача (1) имеет единственное слабое решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ и справедлива оценка (11); 3) оператор (12) осуществляет изоморфизм.*

## 3. Постановка и разрешимость задачи идентификации. Необходимые условия оптимальности

Рассмотрим для модели (1) задачу идентификации, где кроме концентрации $\varphi$ неизвестным является также коэффициент диффузии $\lambda$. В качестве дополнительной информации о решении будем использовать значения $\varphi_d$ концентрации $\varphi$ в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$. Решение рассматриваемой задачи можно свести к экстремальной задаче при определенном выборе функционала качества $I$. В качестве управления выберем функцию $\lambda$, которую будем искать в некотором множестве $K$, удовлетворяющем условию

(iii) $K \subset \Lambda$ – непустое выпуклое замкнутое множество.

Введем в рассмотрение функционал

$$J(\varphi, \lambda) = \frac{\mu_0}{2}I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|_2^2. \tag{14}$$

Здесь $\mu_0, \mu_1$ — неотрицательные константы, $I : X \to \mathbb{R}$ — функционал качества, определяемый формулой

$$I(\varphi) = \|\varphi - \varphi_d\|_Q^2 = \int_Q |\varphi - \varphi_d|^2 d\mathbf{x} \equiv \int_\Omega r(\varphi - \tilde{\varphi}_d)^2 d\mathbf{x}, \tag{15}$$

где $\lambda$ — искомое управление, $\varphi_d \in L^2(Q)$ — заданная функция, $r = \chi_Q$ — характеристическая функция множества $Q$, $\tilde{\varphi}_d \in L^2(Q)$ — функция, равная $\varphi_d$ в $Q$ и $0$ — вне $Q$.

Рассматривая функционал $J$ на слабых решениях задачи (1), запишем ограничение, имеющее вид ее слабой формулировки (10), в виде $F(\varphi, \lambda) = 0$. Здесь оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \equiv X \to Y \equiv \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma)$ действует по формулам

$$\langle F_1(\varphi, \lambda), \eta \rangle = \langle A\varphi, \eta \rangle - (f, \eta) \equiv a(\varphi, \eta) - (f, \eta), \;\; F_2(\varphi, \lambda) = \varphi|_\Gamma - \psi \;\; \forall \eta \in \mathcal{T}. \tag{16}$$

С учетом введенных обозначений перепишем сформулированную выше задачу идентификации в виде следующей экстремальной задачи:

$$J(\varphi, \lambda) \to \inf, \;\; F(\varphi, \lambda) = 0, \;\; (\varphi, \lambda) \in H^1(\Omega) \times K. \tag{17}$$

Введем множество $Z_{ad} = \{(\varphi, \lambda) \in X \times K : F(\varphi, \lambda) = 0, \; J(\varphi, \lambda) < \infty\}$ допустимых пар $(\varphi, \lambda)$ для задачи (17).

**Теорема 3.1.** *Пусть $I : X \to \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу функционал качества, $\mu_0 > 0, \mu_1 > 0$, и выполняются условия (i), (iii), причем множество $Z_{ad}$ не пусто. Тогда задача (17) имеет по крайней мере одно решение $(\varphi, \lambda) \in H^1(\Omega) \times K$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $(\varphi_m, \lambda_m) \in Z_{\text{ad}}$, $m \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \ldots\}$, минимизирующую последовательность для функционала $J$, для которой выполняется соотношение

$$\lim_{m\to\infty} J(\varphi_m, \lambda_m) = \inf_{(\varphi,\lambda)\in Z_{ad}} J(\varphi, \lambda) \equiv J^*.$$

В случае, когда множество $K$ ограничено, справедлива оценка

$$\|\lambda_m\|_2 \le c_1 \; \forall m \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Здесь и ниже $c_1$ – некоторая константа, не зависящая от $m$. В случае, когда множество $K$ неограниченно, эта оценка также выполняются из-за условия неотрицательности функционала $J$ и условий $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$.

Из (18) и теоремы 2.1 вытекает, в свою очередь, что $\|\varphi_m\|_1 \le c_2$. Из этой оценки и (18), вытекает в силу свойств слабой компактности ограниченных множеств в рефлексивных банаховых пространствах, что существуют слабые пределы $\lambda^* \in H^2(\Omega)$, $\varphi^* \in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\lambda_m\}$, $\{\varphi_m\}$. Не умаляя общности рассуждений, эти подпоследовательности по прежнему будем обозначать как $\{\lambda_m\}$, $\{\varphi_m\}$. С учетом этого и компактности вложений (см. [15, с. 32])

$$H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega), \gamma H^1(\Omega) \subset L^p(\Gamma) \text{ при любом } p < 4, \;\; H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \tag{19}$$

можно считать, что $\varphi_m$ сходится к $\varphi^*$ слабо в $H^1(\Omega)$, $\varphi_m$ сходится к $\varphi^*$ сильно в $L^4(\Omega)$, $\varphi_m|_\Gamma$ сходится к $\varphi^*|_\Gamma$ сильно в $L^2(\Gamma)$, $\lambda_m \to \lambda^*$ слабо в $H^2(\Omega)$, $\lambda_m \to \lambda^*$ сильно в $L^\infty(\Omega)$ при $m \to \infty$. Поскольку $K$ является выпуклым замкнутым множеством в гильбертовом пространстве $H^2(\Omega)$, то оно замкнуто и в слабой топологии. Это означает, что $\lambda^* \in K$. Так как $\gamma\varphi_m = \psi_m$, то из свойства непрерывности оператора следа $\gamma$ вытекает, что $\gamma\varphi^* = \psi^*$ и, следовательно, $F_2(\varphi^*, \lambda^*) = 0$.

Покажем, что $F_1(\varphi^*, \lambda^*) = 0$, то есть что

$$a_{\lambda^*}(\varphi^*, \eta) + (\kappa\varphi^*, \eta) - (f, \eta) = 0 \; \forall \eta \in \mathcal{T}. \tag{20}$$

Для этого заметим, что $\lambda_m$ и $\varphi_m$ при каждом $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяют тождеству

$$\langle F_1(\varphi_m, \lambda_m), \eta\rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} \equiv a_{\lambda_m}(\varphi_m, \eta) + (\kappa\varphi_m, \eta) - (f, \eta) = 0 \; \forall \eta \in \mathcal{T}. \tag{21}$$

Ясно, что линейное слагаемое в левой части (21) переходит при $m \to \infty$ в соответствующее линейное слагаемое в (20).

Покажем, что $a_{\lambda_m}(\varphi_m, \eta) \to a_{\lambda^*}(\varphi^*, \eta)$ при $m \to \infty$. Получим

$$|a_{\lambda_m}(\varphi_m, \eta) - a_{\lambda^*}(\varphi^*, \eta)| \le |(\lambda^*\nabla\eta, \nabla\varphi_m - \nabla\varphi^*)| + |(\lambda_m - \lambda^*, \nabla\varphi_m \cdot \nabla\eta)| \; \forall \eta \in \mathcal{T}. \tag{22}$$

Первое слагаемое в правой части (22) стремится к нулю при $m \to \infty$. Теперь рассмотрим второе слагаемое в (22). Уже указывалось, что $\lambda_m \to \lambda^*$ сильно в $L^\infty(\Omega)$. Так как $\nabla\varphi^* \in L^2(\Omega), \nabla\eta \in L^2(\Omega)$, то $\nabla\varphi^* \cdot \nabla\eta \in L^1(\Omega)$. С учетом этого, применяя неравенство Гельдера, выводим

$$|(\lambda_m - \lambda^*, \nabla\varphi^* \cdot \nabla\eta)| \le \|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\varphi^* \cdot \nabla\eta\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \text{ при } m \to \infty \;\; \forall \eta \in H^1(\Omega).$$

Это значит, что $F_1(\varphi^*, u^*) = 0$. Кроме того, так как функционал $J$ слабо полунепрерывен снизу, то имеем

$$J^* = \lim_{m\to\infty} J(\varphi_m, u_m) = \varliminf_{m\to\infty} J(\varphi_m, u_m) \ge J(\varphi^*, u^*) \ge J^*.$$

Теорема доказана.

Выведем необходимые условия оптимальности для задачи (17). Для этого воспользуемся экстремальным принципом в гладко-выпуклых экстремальных задачах [16]. Обозначим двойственное пространство к пространству $Y = \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma)$ через $Y^* = \mathcal{T} \times H^{-1/2}(\Gamma)$, где $H^{-1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)^*$. В соответствии с общей теорией экстремальных задач [16] введем в рассмотрение множитель Лагранжа $y^* = (\eta, \zeta) \in Y^*$, где элемент $\eta \in \mathcal{T}$ является "сопряженной" концентрацией, и лагранжиан $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\varphi, \lambda, \eta, \zeta) \equiv J(\varphi, \lambda) + \langle y^*, F(\varphi, \lambda)\rangle_{Y^* \times Y} \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|_2^2 + \langle y^*, F(\varphi, \lambda)\rangle_{Y^* \times Y}. \tag{23}$$

Здесь

$$\langle y^*, F(\varphi, \lambda)\rangle_{Y^* \times Y} = \langle F_1(\varphi, \lambda), \eta\rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} + \langle \zeta, F_2(\varphi, \lambda)\rangle_\Gamma. \tag{24}$$

Из линейности оператора $F$ и выпуклости множества $K$ вытекает, что множество $F(\varphi, K) = \{y \in Y : y = F(\varphi, \lambda), \lambda \in K\}$, является выпуклым подмножеством в $Y$ для всех $\varphi \in X$.

Используя линейность оператора $A$, выводим далее, что производная оператора $F_1(\cdot, \lambda) : X \to \mathcal{T}^*$ по $\varphi$ определяется формулой

$$\langle F'_{1\varphi}(\hat{\varphi}, \hat{\lambda})\tau, \eta\rangle = \langle \hat{A}\tau, \eta\rangle \equiv a_{\hat{\lambda}}(\tau, \eta) + (\kappa\tau, \eta) \; \forall \tau \in X, \eta \in \mathcal{T}. \tag{25}$$

Аналогично (25) в силу свойств оператора $\gamma$ имеем

$$\langle \zeta, F'_{2\varphi}(\hat{\varphi}, \hat{\lambda})\tau\rangle = \langle \zeta, \tau\rangle_\Gamma \; \forall \tau \in X. \tag{26}$$

Из (25) и (26) вытекает в силу справедливости теоремы 2.1, что оператор $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{\lambda}) \equiv (\hat{A}, \gamma) : X \to Y$ – изоморфизм. В таком случае из [15, 16] следует теорема 3.2.

**Теорема 3.2.** *Пусть при выполнении условий теоремы 3.1 пара $(\hat{\varphi}, \hat{\lambda}) \in H^1(\Omega) \times K$ является элементом, на котором достигается локальный минимум в задаче (17). Тогда существует единственный множитель Лагранжа $y^* = (\eta, \zeta) \in \mathcal{T} \times H^{-1/2}(\Gamma)$ такой, что справедливо уравнение Эйлера – Лагранжа*

$$\langle \mathcal{L}'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{\lambda}, \eta, \zeta), \tau\rangle = 0 \; \forall \tau \in H^1(\Omega), \tag{27}$$

*и выполняется принцип минимума*

$$\langle \mathcal{L}'_\lambda(\hat\varphi, \hat\lambda, \eta, \zeta), \lambda - \hat\lambda\rangle \ge 0 \ \forall \lambda \in K. \tag{28}$$

Из определения (23) получим

$$\langle \mathcal{L}'_\varphi(\hat\varphi, \hat\lambda, \eta, \zeta), \tau\rangle = \langle J'_\varphi(\hat\varphi, \hat\lambda), \tau\rangle + \langle y^*, F'_\varphi(\hat\varphi, \hat\lambda)\tau\rangle = \frac{\mu_0}{2}\langle I'_\varphi(\hat\varphi), \tau\rangle + \langle y^*, F'_\varphi(\hat\varphi, \hat\lambda)\tau\rangle. \tag{29}$$

Ясно также — согласно определению производной Гато от функционала $I(\varphi)$ в направлении $\tau$ — что

$$\langle J'_\varphi(\hat\varphi, \hat\lambda), \tau\rangle = (\mu_0(\hat\varphi - \varphi_d), \tau)_Q \ \forall \tau \in H^1(\Omega). \tag{30}$$

Из (24), (25), (26) следует, что

$$\langle y^*, F'_\varphi(\hat\varphi, \hat\lambda)\tau\rangle_{Y^*\times Y} = \langle F'_{1\varphi}(\hat\varphi, \hat\lambda)\tau, \eta\rangle_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} + \langle \zeta, F'_{2\varphi}(\hat\varphi, \hat\lambda)\tau\rangle_\Gamma =$$

$$= \langle \hat A\tau, \eta\rangle_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} + \langle \zeta, \tau\rangle_\Gamma \equiv a_{\hat\lambda}(\tau, \eta) + (\kappa\tau, \eta) + \langle \zeta, \tau\rangle_\Gamma \ \forall \tau \in X. \tag{31}$$

Из (30), (31) вытекает, что уравнение (27) эквивалентно

$$\langle \hat A\tau, \eta\rangle_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} + \langle \zeta, \tau\rangle_\Gamma = -\mu_0(\hat\varphi - \varphi_d, \tau)_Q \ \forall \tau \in X \tag{32}$$

для пары $(\eta, \zeta)$, которое $\forall \tau \in \mathcal{T}$ также можно переписать в виде

$$a_{\hat\lambda}(\tau, \eta) + (\kappa\tau, \eta) = -\mu_0(\hat\varphi - \varphi_d, \tau)_Q. \tag{33}$$

Используя формулу Грина (9), перепишем (33) в виде

$$\int_\Omega \left[-\mathrm{div}(\hat\lambda\nabla\eta) + \kappa\eta\right]\tau d\mathbf{x} = -\int_Q \mu_0(\hat\varphi - \varphi_d)\tau d\mathbf{x} \ \forall \tau \in \mathcal{T}.$$

Отсюда следует, что первый множитель Лагранжа $\eta$ является слабым решением краевой задачи

$$-\,\mathrm{div}(\hat\lambda\nabla\eta) + \kappa\eta = -\mu_0\chi_Q(\hat\varphi - \tilde\varphi_d) \text{ в } \Omega,\ \eta|_\Gamma = 0. \tag{34}$$

Обратимся теперь к принципу минимума (28). Нетрудно показать, что производная $\mathcal{L}'_\lambda$ определяется соотношением

$$< \mathcal{L}'_\lambda(\hat\varphi, \hat\lambda, \eta, \zeta), \lambda >= (\mu_1\hat\lambda, \lambda)_2 + (\lambda\nabla\hat\varphi, \nabla\eta) \ \ \forall \lambda \in K, \eta \in \mathcal{T}. \tag{35}$$

Учитывая (28), (35), приходим к следующему вариационному неравенству:

$$\mu_1(\hat\lambda, \tilde\lambda - \hat\lambda)_2 + ((\tilde\lambda - \hat\lambda)\nabla\hat\varphi, \nabla\eta) \ge 0 \ \forall \tilde\lambda \in K. \tag{36}$$

Ниже на (33) будем ссылаться как на “сопряженную” задачу. Подчеркнем, что прямая задача (10), сопряженная задача (33) и неравенство (36) представляют собой систему оптимальности, описывающую необходимые условия минимума для задачи (17).

## 4. Единственность решения задачи идентификации

Основываясь на анализе системы оптимальности, установим достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решения задачи (17). С этой целью обозначим через $M_\varphi(\lambda)$ правую часть оценки (11) и предположим, что выполняется условие

$$\sup_{\lambda\in K} M_\varphi(\lambda) \le M_\varphi^0 = \mathrm{const} < \infty. \tag{37}$$

Условие (37) заведомо выполняется в силу выполнения неравенства (11), если $K$ ограничено или $\psi = 0$.

Предположим, что существуют два решения $(\varphi_1, \lambda_1)$ и $(\varphi_2, \lambda_2) \in H^1(\Omega)\times K$ задачи (17). Из теоремы 2.1 и (37) для $\varphi_i$ вытекают оценки

$$\|\varphi_i\|_1 \le M_\varphi^0,\ i = 1, 2. \tag{38}$$

Обозначим через $(\eta_i, \zeta_i), i = 1, 2$, отвечающие указанным решениям множители Лагранжа. Полагая $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\eta = \eta_1 - \eta_2$, $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$, вычтем соотношения (10), записанные для $(\varphi_2, \lambda_2)$, из этих же соотношений (10), записанных для $(\varphi_1, \lambda_1)$. Используя равенство

$$(\lambda_1\nabla\varphi_1, \nabla\eta) - (\lambda_2\nabla\varphi_2, \nabla\eta) = (\lambda_2\nabla\varphi, \nabla\eta) + (\lambda\nabla\varphi_1, \nabla\eta), \tag{39}$$

получим

$$(\lambda_2\nabla\varphi, \nabla h) + (\kappa\varphi, h) = -(\lambda\nabla\varphi_1, \nabla h)\ \forall h \in \mathcal{T},\ \varphi|_\Gamma = 0. \tag{40}$$

Полагая $h = \varphi$ и используя (7), (38), из (40) получаем, что

$$\lambda_*\|\varphi\|_1^2 \le (\lambda_2\nabla\varphi_1, \nabla\varphi) + (\kappa\varphi, \varphi) \le \gamma_0\|\lambda\|_2 M_\varphi^0\|\varphi\|_1.$$

Отсюда приходим к следующей оценке для $\|\varphi\|_1$:

$$\|\varphi\|_1 \le \frac{1}{\lambda_*}\gamma_0 M_\varphi^0\|\lambda\|_2. \tag{41}$$

Обратимся далее к тождеству (33), где положим $\eta = \eta_i$, $\hat{\lambda} = \lambda_i, \tau = \eta_i$. Учитывая, что $\eta_i|_\Gamma = 0$, получим

$$a_{\lambda_i}(\eta_i, \eta_i) + (\kappa\eta_i, \eta_i) = -\mu_0(\varphi_i - \varphi_d, \eta_i)_Q\ i = 1, 2. \tag{42}$$

Используя (7), (38), выводим, что

$$\lambda_*\|\eta_i\|_1^2 \le \mu_0\gamma_2(\gamma_2\|\varphi_i\|_1 + \|\varphi_d\|_Q)\|\eta_i\|_1 \le \mu_0\gamma_2(\gamma_2 M_\varphi^0 + \|\varphi_d\|_Q)\|\eta_i\|_1. \tag{43}$$

Из (43) приходим к следующей оценке для $\eta_i$:

$$\|\eta_i\|_1 \le \frac{1}{\lambda_*}\mu_0\gamma_2(\gamma_2 M_\varphi^0 + \|\varphi_d\|_Q),\ i = 1, 2. \tag{44}$$

Вычтем тождество (33), записанное для $(\varphi_2, \lambda_2, \eta_2)$, из этого же тождества, записанного для $(\varphi_1, \lambda_1, \eta_1)$. Учитывая соотношения вида (33), получим

$$(\lambda_2\nabla\tau, \nabla\eta) + (\kappa\tau, \eta) + \langle\zeta, \tau\rangle_\Gamma = -(\lambda\nabla\tau, \nabla\eta_1) - \mu_0(\varphi, \tau)_Q\ \forall\tau \in X.$$

Полагая здесь $\tau = \eta$, будем иметь

$$(\lambda_2\nabla\eta, \nabla\eta) + (\kappa\eta, \eta) = -(\lambda\nabla\eta, \nabla\eta_1) - \mu_0(\varphi, \eta)_Q. \tag{45}$$

Из (45) выводим, что

$$\lambda_*\|\eta\|_1^2 \le \gamma_0\|\lambda\|_2\|\eta_1\|_1\|\eta\|_1 + \mu_0\gamma_2^2\|\varphi\|_1\|\eta\|_1.$$

Используя оценки (41), (44), приходим к следующей оценке для $\eta$:

$$\|\eta\|_1 \le \frac{1}{\lambda_*^2}\mu_0\gamma_0\gamma_2(2\gamma_2 M_\varphi^0 + \|\varphi_d\|_Q)\|\lambda\|_2. \tag{46}$$

Обратимся теперь к неравенству (36). Полагая $\tilde{\lambda} = \lambda_1$ в неравенстве (36), записанном при $\hat{\lambda} = \lambda_2, \hat{\varphi} = \varphi_2, \hat{\eta} = \eta_2$, и $\tilde{\lambda} = \lambda_2$ в этом же неравенстве при $\hat{\lambda} = \lambda_1, \hat{\varphi} = \varphi_1, \hat{\eta} = \eta_1$, получим

$$\mu_1(\lambda_2, \lambda)_2 + (\lambda\nabla\varphi_2, \nabla\eta_2) \ge 0, \;\; -\mu_1(\lambda_1, \lambda)_2 - (\lambda\nabla\varphi_1, \nabla\eta_1) \ge 0.$$

Складывая эти неравенства, получим неравенство

$$-\mu_1(\lambda, \lambda)_2 \ge (\lambda\nabla\varphi_1, \nabla\eta_1) - (\lambda\varphi_2, \nabla\eta_2),$$

эквивалентное следующему неравенству:

$$\mu_1\|\lambda\|_2^2 \le -(\lambda\nabla\varphi_1, \nabla\eta_1) + (\lambda\nabla\varphi_2, \nabla\eta_2) = -(\lambda\nabla\varphi_2, \nabla\eta) - (\lambda\varphi, \nabla\eta_1). \tag{47}$$

Используя (7), (38) и (46), из (47) приходим к соотношению

$$\mu_1\|\lambda\|_2^2 \le M_*\|\lambda\|_2^2, \; M_* = \frac{1}{\lambda_*^2}\mu_0\gamma_0^2\gamma_2 M_\varphi^0(3\gamma_2 M_\varphi^0 + 2\|\varphi_d\|_Q),$$

которое перепишем в виде

$$(\mu_1 - M_*)\|\lambda\|_2^2 \le 0. \tag{48}$$

Предположим, что выполняется условие

$$\mu_1 \ge M_* = \frac{1}{\lambda_*^2}\mu_0\gamma_0^2\gamma_2 M_\varphi^0(3\gamma_2 M_\varphi^0 + 2\|\varphi_d\|_Q). \tag{49}$$

Тогда из (48) вытекает, что $\lambda = 0$, а из (41) получаем, что $\|\varphi\|_1 = 0$. Это означает единственность решения задачи (17). Тем самым доказана теорема 4.1.

**Теорема 4.1.** *Пусть в дополнение к условиям (i),(iii), $\varphi_d \in L^2(Q)$ – заданная функция, $\mu_0 > 0$, $K \subset \Lambda$ – непустое выпуклое замкнутое множество и пусть выполняются условия (37), (49). Тогда решение $(\varphi, \lambda) \in H^1(\Omega) \times K$ задачи (17) единственно.*

## 5. Численный алгоритм решения задачи идентификации на основе метода Ньютона. Результаты численных экспериментов.

В дополнение к условиям (i),(iii) будем считать, что экстремум достигается во внутренней точке множества $K$. В этом случае неравенство (36) системы оптимальности переходит в равенство. В результате получаем следующую систему уравнений:

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (\kappa\varphi, h) = (f, h) \;\; \forall h \in \mathcal{T}, \;\; \varphi|_\Gamma = \psi, \tag{50}$$

$$(\lambda\nabla\tau, \nabla\eta) + (\kappa\tau, \eta) = -\mu_0(\varphi - \varphi_d, \tau)_Q \;\; \forall\tau \in \mathcal{T}, \;\; \eta|_\Gamma = 0, \tag{51}$$

$$\mu_2(\lambda, p)_2 + (\nabla\varphi\cdot\nabla\eta, p) = 0 \; \forall p \in H^2(\Omega). \tag{52}$$

Перепишем систему (50) — (52) в виде операторного уравнения

$$\Psi(\varphi, \eta, \lambda) = 0, \tag{53}$$

где оператор $\Psi : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times (H^2(\Omega))^*$ – линейный оператор, определяемый соотношениями (50)–(52).

Для решения уравнения (51) применим итерационный алгоритм, основанный на методе Ньютона для решения нелинейных уравнений. Он состоит из следующих этапов:

1) полагаем $n = 0$. Выбираем некоторое начальное приближение $\varphi_n, \eta_n, \lambda_n$;

2) вычисляем $(\bar{\varphi}, \bar{\eta}, \bar{\lambda})$ как решение уравнения

$$\Psi'(\varphi_n, \eta_n, \lambda_n)[\bar{\varphi}, \bar{\eta}, \bar{\lambda}] = -\Psi(\varphi_n, \eta_n, \lambda_n); \tag{54}$$

3) пересчитываем значения искомых величин по формулам

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \bar{\varphi},\ \eta_{n+1} = \eta_n + \bar{\eta},$$
$$\tilde{\lambda}_{n+1} = \lambda_n + \bar{\lambda},\ \lambda_{n+1} = P(\tilde{\lambda}_{n+1}), \tag{55}$$

где $P$ – оператор проектирования на множество $K$;

4) проверяем условия выхода из цикла. Если условия не выполняются, то полагаем $n = n + 1$ и переходим к этапу 2.

Обсудим результаты численных экспериментов, полученные в результате решения рассматриваемой задачи идентификации в модельных случаях. Программная реализация осуществлялась на персональном компьютере PIV-2200 с использованием среды инженерных и научных расчетов FreeFem++. Для выполнения численных расчетов использовались триангуляции, автоматически генерируемые пакетом при указании параметров разбиения границы. Для расчетов использовалось разбиение отрезка границы на 20 точек.

Согласно концепции квазиреального эксперимента, сначала численно решалась прямая задача при заданных функциях $f, \psi$ и заданном коэффициенте $\lambda = \lambda_d$ . В результате расчетов определялись значения $\varphi_d(x, y)$ решения прямой задачи. Затем решалась задача восстановления коэффициента $\lambda$ уравнения (1), в которой в качестве дополнительной информации о решении в подобласти $Q \subset \Omega$ использовалась функция $\varphi_d$.

В соответствии с описанным алгоритмом выбиралось начальное приближение $\lambda_0$, затем на каждом итерационном шаге находилось решение $\varphi_n$ краевой задачи (1) путем решения соответствующей задачи (50) при заданном приближении $\lambda_{n-1}$. Далее на этом же итерационном шаге решалась сопряженная задача (51), используя найденные значения решения $\varphi_n$ прямой задачи для этого же приближения $\lambda_{n-1}$ и значения заданной функции $\varphi_d$. Затем из (52) находилось новое приближение $\lambda_n$ для $\lambda$. После этого осуществлялся переход на новый итерационный шаг либо происходил выход из итерационного цикла. В последнем случае за решение принималась пара $(\varphi_n, \lambda_n)$, вычисленная на последнем итерационном шаге.

При проведении расчетов удобно перейти в исходной и сопряженной краевой задачах к безразмерным переменным с помощью соотношений

$$\tilde{x} = \frac{x}{l},\ \tilde{y} = \frac{y}{l},\ \tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\Phi},\ \tilde{\kappa} = \frac{l^2\kappa}{\lambda_{min}},\ \tilde{f} = \frac{l^2 f}{\Phi\lambda_{min}},\ \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_{min}}.$$

Здесь $\lambda_{min}$ – минимальное значение, которое принимает коэффициент диффузии, $\Phi$ – характерное значение концентрации, $\tilde{\kappa}$ – безразмерная функция, имеющая смысл безразмерной скорости объемной химической реакции первого порядка, $\tilde{\lambda}$ – безразмерная функция, являющаяся коэффициентом диффузии.

В качестве значений исходных данных были выбраны следующие:

$$\lambda_{min} = 0.001, f(x, y) = 10, \kappa(x, y) = 1 \ (x, y) \in \Omega, \ \psi(x, y)|_\Gamma = 1.$$

В качестве области $\Omega$ был выбран прямоугольник $[-1, 1] \times [0, 1]$, подобласть $Q$ либо совпадала со всей областью $\Omega$, либо выбиралась как прямоугольник $[-l, l] \times [0, 1]$ для заданного $l \in (0, 1)$. Начальное приближение $\lambda_0 = 14$ выбиралось для первого теста и $\lambda_0 = 12$ – для второго теста.

Был проведен ряд вычислительных экспериментов по идентификации старшего коэффициента уравнения в (1), в которых искомый коэффициент являлся постоянной величиной, функцией, зависящей от одной переменной $x$ или $y$, а также функцией, зависящей от двух переменных $x$ и $y$. Ниже мы представим результаты и анализ вычислительных экспериментов по восстановлению искомого параметра $\lambda$ для тестов, в которых точное значение восстанавливаемого параметра $\lambda$ определялось соответственно формулами

$$\lambda_T^{(1)}(x, y) = 10, \ \ \lambda_T^{(2)}(x, y) = 10 + (x - 1)(x + 1).$$

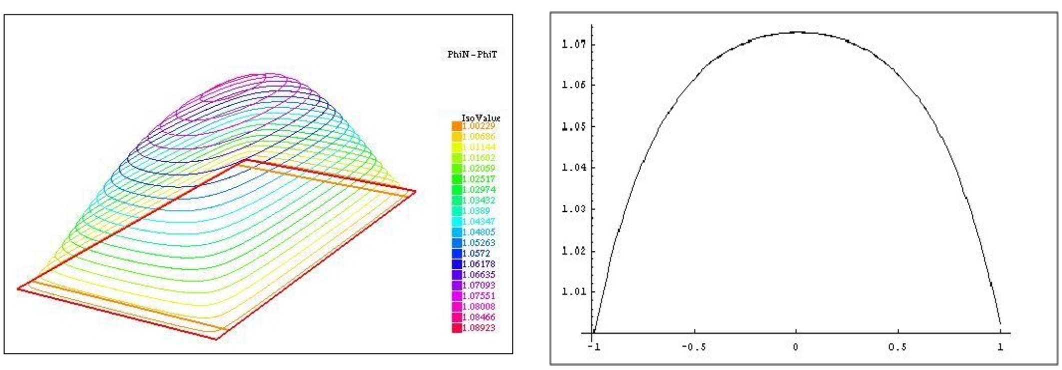
Точность решения задачи определялась при помощи относительных погрешностей

$$E_1 = \frac{\|\varphi - \varphi_d\|_Q}{\|\varphi_d\|_Q} \text{ и } E_2 = \frac{\|\lambda - \lambda_T\|}{\|\lambda_T\|}, (\|\lambda_T\| = \|\lambda_T\|_\Omega).$$

В качестве критерия остановки использовалось одно из следующих условий:

$$|E_1| < 10^{-6}, \ |(E_1)_n - (E_1)_{n-1}| < 10^{-9}, \ |E_1| > 10^3.$$

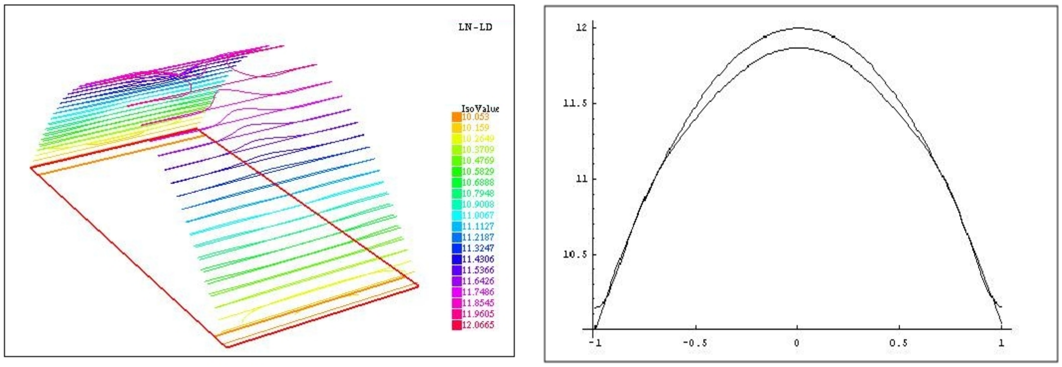
При использовании алгоритмов, основанных на методе Ньютона, удается получить приближенное решение с достаточно высокой точностью, но при условии, что начальное приближение выбрано достаточно близко к точному решению. На рис. 1 и 2 можно увидеть примеры восстановления функций $\varphi$ и $\lambda$ для теста 2.




а) значения функций $\varphi_n$ и $\varphi_d$ б) сечение функций $\varphi_n$ и $\varphi_d$ плоскостью $y = 0.5$

Рис. 1. *Примеры восстановления функций $\varphi_n$ и $\varphi_d$ для теста 2 при $n = 4$*

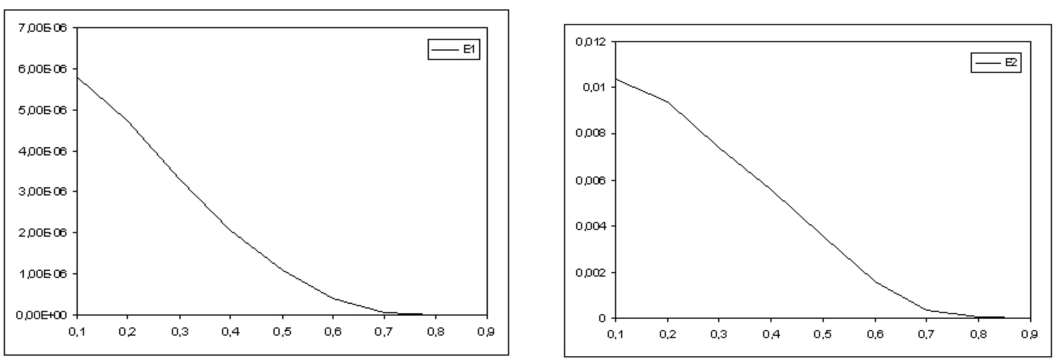
В соответствии с алгоритмом в качестве начального приближения $\lambda_0$ было выбрано число 12. Заданная точность было достигнута за 4 итерации. На рис. 1а представлен трехмерный график для функций $\varphi_n$ и $\varphi_d$. Видно, что графики функций $\varphi_n$ и $\varphi_d$ практически совпадают. На рисунке 1б показан график сечения данных функций плоскостью $y = 0.5$. Опять замечаем, что графики функций совпадают. На рис. 2 показаны аналогичные графики для функций $\lambda_n$ и $\lambda_T$.




а) значения функций $\lambda_n$ и $\lambda_T$ б) сечение функций $\lambda_n$ и $\lambda_T$ плоскостью $y = 0.5$

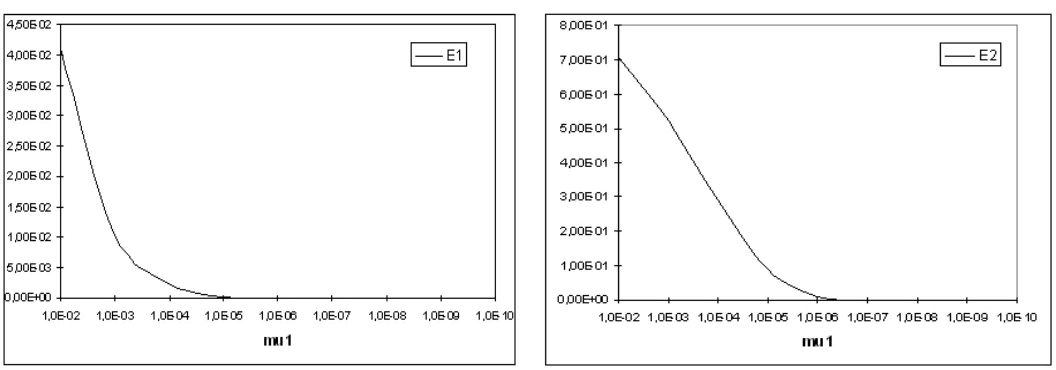
Рис. 2. *Примеры восстановления* $\lambda_n$ *и* $\lambda_T$ *для теста 2 при* $n = 4$

Большое влияние на точность решения оказывает размер подобласти $Q$. На рис. 3 показаны зависимости относительных погрешностей от размера подобласти $Q$ для второго теста. Ясно, что чем больше площадь подобласти $Q$, тем качественнее удается восстановить неизвестный коэффициент $\lambda$ и получить более точное приближенное решение $\varphi$. В случае, когда подобласть $Q$ занимает только 10% области $\Omega$, чему отвечает значение $l = 0.1$, качественно восстановить значения искомой функции не удается. Если же подобласть $Q$ занимает больше 70% области, чему отвечает значение $l = 0.7$, то точность восстановления практически такая же, как в случае совпадения $Q$ со всей $\Omega$.




а) $E_1$ б) $E_2$

Рис. 3. *Зависимость относительной погрешности от размеров подобласти* $Q$




а) $E_1$ б) $E_2$

Рис. 4. *Зависимость относительной погрешности от параметра* $\mu_1$

Изменение же параметра регуляризации $\mu_1$ оказывает куда более существенное влияние на точность восстановления. С уменьшением значения параметра $\mu_1$ происходит улучшение точности восстановления. Уменьшается как относительная погрешность $E_1$, так и относительная погрешность $E_2$. Из рис. 4 видно, что для получения достаточно высокой точности следует использовать значения параметра $\mu_1$, не большие 0.01. Также не следует использовать слишком маленькие ($< 10^{-10}$) значения данного параметра. В этом случае алгоритм расходится и восстановить значения искомого коэффициента диффузии не удается.

## Список литературы


[1] К. А. Лурье, *Оптимальное управление в задачах математической физики*, Наука, М., 1975, 480 с.

[2] С. Я. Серовайский, *Оптимизация и дифференцирование*, Т. 1: Минимизация функционалов. Стационарные системы, Print-S, Алматы, 2006, 602 с.

[3] K. Ito, K. Kunisch, "Estimation of the convection coefficient in elliptic equations", *Inverse Problems*, 1997, № 14, 995–1013

[4] Г. В. Алексеев, Е. А. Калинина, "Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **11**:1, (2007), 3–16.

[5] Runsheng Yang Yunhua Ou, "Inverse coefficient problems for nonlinear elliptic equations", *ANZIAM*, **1149**:2, (2007), 271–279.

[6] Guy Chavent, Karl Kunisch, "The output least squares identifiability of the duffusion coefficient from an $H^1$-observation in a 2-D elliptic equation", *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, 2002, № 8, 423–440.

[7] Yee Lo Keung, Jun Zou, "Numerical identification of parametersin parabolic system", *Inverse Problems*, 1998, № 14, 83–100.

[8] Ian Knowles, "A variational algorithm for electrical impedance tomography", *Inverse Problems*, 1998, № 14, 1513–1525.

[9] Г. В. Алексеев, "Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса", *Сиб. мат. журн.*, **42**:5, (2001), 971–991.

[10] C. V. Alekseev, E. A. Adomavichus, "Theoretical analysis of inverse extremal problems of admixture diffusion in viscous fluids", *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **9**:5, (2001), 435–468.

[11] Г. В. Алексеев, "Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса", *Ж. выч. матем. и мат. физ.*, **42**:3, (2002), 380–394.

[12] Г. В. Алексеев, "Единственность и устойчивость в коэффициентных обратных экстремальных задачах для стационарной модели массопереноса", *Докл. АН*, **416**:6, (2007), 750–753.

[13] Г. В. Алексеев, "Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса", *Журн. вычисл. матем. матем. физики*, **47**:6, (2007), 1055–1076.

[14] Г. В. Алексеев, О. В. Соболева, Д. А. Терешко, "Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса", *Прикл. мех. техн. физ.*, **49**:4, (2008), 24–35.

[15] Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко, *Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости*, Дальнаука, Владивосток, 2008.

[16] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974, 240 с.



Представлено в Дальневосточный математический журнал 8 января 2010 г.

Работа выполнена при поддержке грантов НШ-2810.2008.1, РФФИ-"Дальний Восток" (проект 09-01-98518-р_восток_а) и гранта Дальневосточного отделения РАН (проект 09-I-П29-01).

*Vakhitov I.S.* Inverse problem of identification of the diffusion coefficient in diffision-reaction equation. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 2. P. 93–105.

ABSTRACT

The solvability and uniqueness of inverse extremum problem of identification of the diffusion coefficient in a two-dimensional diffusion-reaction equation are proved. The numerical algorithm of solving the inverse problem is developed and realized. The results of numerical experiments are discussed.

Key words: *elliptic equation, identification problem, diffusion coefficient, Newton method, uniqueness.*