ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 204–208

УДК 517.95
MSC2000 49K20

© А.Ю. Чеботарев*

Устойчивый синтез оптимального управления в экстремальной задаче для эллиптического уравнения

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

Рассматривается задача оптимального управления для эллиптического уравнения, решения которого являются неустойчивыми особыми точками соответствующей эволюционной системы. Предлагается конструкция управления с обратной связью, обеспечивающая устойчивость оптимального состояния.

Ключевые слова: *оптимальное управление, система оптимальности, управление с обратной связью, устойчивость стационарного решения*

1. Введение

Теория оптимального управления стационарными системами с частными производными развита достаточно хорошо, особенно для случая линейных уравнений [1], [2], [3]. В математической теории управления стационарными распределенными системами основное внимание обычно уделяется вопросам разрешимости экстремальных задач и построению систем оптимальности, описывающих необходимые, а иногда и достаточные условия экстремума. В то же время в стороне остается следующая проблема, интересная с точки зрения приложений. При решении задач управления стационарными системами важно, чтобы оптимальное состояние являлось устойчивой особой точкой соответствующей эволюционной системы. В противном случае полученный оптимальный стационарный режим не реализуется. Таким образом, возникает проблема стабилизации эволюционной системы в окрестности неустойчивого стационарного состояния за счет, например, управления с обратной связью [4], что может оказаться затратным по управлению. Поэтому естественно попытаться найти представление стационарного оптимального управления через оптимальное состояние, которое обеспечит устойчивость оптимального состояния.

Рассмотрим метод построения устойчивого синтеза оптимального управления на примере следующей простой экстремальной задачи для эллиптического уравнения с распределенным управлением. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m > 1$, — ограниченная область с гладкой границей Γ. Через $L^2(\Omega)$ обозначаем пространство функций, интегрируемых с квадратом в Ω. Задача состоит в нахождении пары управление – состояние $\{u, y\}$ такой, что

$$J(u,y) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \to \inf, \qquad (1)$$

$$\Delta y + ky = -u, \quad x \in \Omega, \quad y|_\Gamma = 0. \qquad (2)$$

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: cheb@iam.dvo.ru

Здесь $y_d \in L^2(\Omega)$, $\lambda > 0$, $k > 0$.

Отметим сразу важную особенность краевой задачи (2), состоящую в том, что ее решение, если k велико, является неустойчивой особой точкой динамической системы, порождаемой эволюционным уравнением

$$\dot{y} - \Delta y - ky = u$$

в пространстве $L^2(\Omega)$. Здесь $\dot{y} = \partial y / \partial t$.

2. Пространства и операторы. Система оптимальности

Обозначим через H пространство $L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega) = \{z \in H^1(\Omega) : \ z|_\Gamma = 0\}$. Здесь и далее через $H^s(\Omega)$ обозначаем пространства Соболева $W_2^s(\Omega)$. Через $(\cdot,\cdot)$ обозначаем скалярное произведение в пространстве H и отношение двойственности между V и сопряженным пространством $V' = H^{-1}(\Omega)$, считая, что $V \subset H = H' \subset V'$. Через $((\cdot,\cdot))$ обозначаем скалярное произведение в V.

$$(u,v) = \int\limits_\Omega (u \cdot v)dx, \ \ ((u,v)) = (\nabla u, \nabla v).$$

Нормы в пространствах H и V обозначаем через $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ соответственно. Определим оператор $A : V \to V'$, используя равенство

$$(Ay, z) = ((y, z)) \ \ \forall y, z \in V.$$

Оператор A удовлетворяет условиям

$$(Ay, y) = \|y\|^2, \ \ (Ay, z) = (Az, y) \ \ \forall y, z \in V. \tag{3}$$

Отметим, что собственные функции оператора A

$$Aw_j = \lambda_j w_j, \ \ (w_i, w_j) = \delta_{ij}, \ \ 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots,$$

образуют базис пространств H и V. Обратный оператор $A^{-1} : V' \to V$ имеет представление

$$A^{-1} f = \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_j}(f, w_j) w_j.$$

Используя введенные обозначения, задачу управления (1)–(2) можно записать в виде

$$J(u,y) = \frac{1}{2}|y - y_d|^2 + \frac{\lambda}{2}|u|^2 \to \inf, \ \ Ay - ky = u. \tag{4}$$

Операторное уравнение $Ay - ky = u$ является слабой формулировкой краевой задачи (2), при этом из условий $u, y \in H$ следует, что $y \in H^2(\Omega)$. Полученное уравнение однозначно разрешимо, если число k не совпадает с собственным числом оператора A, решение уравнения можно записать в виде

$$y = \sum_1^\infty \frac{(u, w_j)}{\lambda_j - k} w_j.$$

Опишем свойства решения задачи оптимального управления (4).

Теорема 1. Пусть $y_d \in H$, $\lambda > 0$, $k > 0$. Тогда существует единственное решение $\{\hat{u}, \hat{y}\}$ задачи (4), при этом $\hat{u} \in H$, $\hat{y} \in V \cap H^2(\Omega)$.

Утверждение теоремы почти очевидно, поскольку множество пар $\{u, y\} \in H \times V$, удовлетворяющих уравнению $Ay - ky = u$, непусто, функционал J является неотрицательным, полунепрерывным снизу и строго выпуклым.

Теорема 2. Пусть $y_d \in H$, $\lambda > 0$, $k > 0$ и не совпадает с собственным числом оператора A. Для того чтобы пара $\{\hat{u}, \hat{y}\} \in H \times V$ была решением задачи (4), необходимо и достаточно, чтобы для некоторой функции $p \in V$ тройка $\{\hat{u}, \hat{y}, p\}$ удовлетворяла системе оптимальности

$$A\hat{y} - k\hat{y} = \hat{u}, \quad Ap - kp = \hat{y} - y_d, \quad \hat{u} = -\frac{1}{\lambda}p. \tag{5}$$

Доказательство теоремы 2 следует, например, из принципа Лагранжа для гладких экстремальных задач [3].

Заметим, что система оптимальности (5) определяет синтез оптимального управления. Из второго и третьего уравнений в (5) оптимальное управление можно выразить через оптимальное состояние с помощью оператора обратной связи $\hat{u} = R(\hat{y})$, где

$$R(y) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{1}^{\infty}\frac{(y - y_d, w_j)}{\lambda_j - k}w_j. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь оптимальное состояние $\hat{y}$ как особую точку динамической системы в пространстве H, порожденной эволюционным уравнением, включающим обратную связь (6):

$$\dot{y} + Ay - ky = R(y), \quad t > 0. \tag{7}$$

Предположим теперь, что значение параметра k больше первого собственного числа оператора A, $k > \lambda_1$. В этом случае состояние $\hat{y}$ является неустойчивой особой точкой системы (7). Действительно, разность $\varphi(t) = y(t) - \hat{y}$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varphi} + A\varphi - k\varphi = -\frac{1}{\lambda}\sum_{1}^{\infty}\frac{(\varphi, w_j)}{\lambda_j - k}w_j,$$

решив которое методом Фурье, получаем

$$\varphi(t) = \sum_{1}^{\infty} e^{\mu_j t}(\varphi(0), w_j)w_j.$$

Здесь $\mu_j = k - \lambda_j + \frac{1}{k-\lambda_j}$ и, по крайней мере, $\mu_1 > 0$, что означает экспоненциальный рост $|\varphi(t)|$, если $(\varphi(0), w_1) \neq 0$.

3. Устойчивый синтез оптимального управления

Для построения обратной связи, обеспечивающей устойчивость оптимального состояния, следует учитывать структуру неустойчивой управляемой системы (2). С этой целью выразим сопряженное состояние из первого и третьего уравнений в системе оптимальности (5)

$$p = \lambda(k\hat{y} - A\hat{y}). \tag{8}$$

Из второго уравнения (5) получаем

$$p = A^{-1}(kp + \hat{y} - y_d). \tag{9}$$

Подставив (8) в правую часть (9), получаем представление сопряженного состояния и оптимального управления через $\hat{y}$:

$$\hat{u} = R_s(\hat{y}), \text{ где } R_s(y) = A^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}y_d - (k^2 + \frac{1}{\lambda})y + kAy\right). \tag{10}$$

Таким образом, оптимальное состояние характеризуется уравнением с обратной связью

$$A\hat{y} - k\hat{y} = R_s(\hat{y}). \tag{11}$$

Теорема 3. Пусть $y_d \in H$, $\lambda > 0$, $k > 0$ и не совпадает с собственным числом оператора A. Оптимальное состояние $\hat{y} \in V$ является устойчивой особой точкой динамической системы, порождаемой эволюционным уравнением

$$\dot{y} + Ay - ky = R_s(y) \tag{12}$$

в фазовом пространстве H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(t) = y(t) - \hat{y}$, где $y(t)$ – решение (12), $y(0) \in H$. Тогда из (11), (12) получаем

$$\dot{\varphi} + A\varphi - k\varphi = A^{-1}\left(kA\varphi - (k^2 + \frac{1}{\lambda})\varphi\right). \tag{13}$$

Получим априорные оценки решения уравнения (13), из которых следует устойчивость оптимального состояния $\hat{y}$. Умножим скалярно в H уравнение (13) на φ:

$$\frac{1}{2}\frac{d|\varphi|^2}{dt} + (q, \varphi - kA^{-1}\varphi) = -\frac{1}{\lambda}(A^{-1}\varphi, \varphi) \leq 0. \tag{14}$$

Здесь $q = A\varphi - k\varphi$. Поэтому

$$\frac{1}{2}\frac{d|\varphi|^2}{dt} + (q, A^{-1}q) \leq 0. \tag{15}$$

Оценим выражение $(q, A^{-1}q)$ снизу:

$$(q, A^{-1}q) = \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_j}(A\varphi - k\varphi, w_j)^2 = \sum_1^\infty \frac{(\lambda_j - k)^2}{\lambda_j}(\varphi, w_j)^2 \geq \alpha|\varphi|^2,$$

поскольку $\lambda_j \to \infty$, когда $j \to \infty$. Постоянная $\alpha > 0$ зависит только от собственных значений оператора A. Из дифференциального неравенства (15) с учетом последней оценки следует

$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(0)|e^{-\alpha t},$$

что означает устойчивость стационарного состояния $\hat{y}$ в фазовом пространстве H.

Замечание. Аналогичным образом, предполагая, что $\varphi(0) \in V$, доказывается устойчивость $\hat{y}$ в пространстве V.

Список литературы

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.

2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые вопросы оптимального управления распределенными системами // УМН. 1985. Т. 40, N 2(244). С. 55-68.

3. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Изд. Научная книга, 1999. 350 с.

4. *Фурсиков А.В.* Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью// Математический сборник. 2001. Т.192. №4. С.115-160.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 21 апреля 2009 г.

Работа выполнена при поддержке гранта ДВО РАН (проект 09-I-ОМН-08) и гранта программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2810.2008.1).

Chebotarev A. Yu. The stable synthesis of optimal control in the extremum problem for elliptic equation. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 204–208.

ABSTRACT

The optimal control problem for the elliptic equation is considered. The solutions of the elliptic equation are the unstable critical points of corresponding evolution system. The construction of the feedback control provided the stability of optimal state is suggested.

Key words: *optimal control, system of optimality, feedback control, stability of stationary solution*