ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 176–181

УДК 511.9, 511.336
MSC2000 11L05, 11H06

© А. В. Устинов*

О распределении точек целочисленной решетки

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

В работе изучается распределение длин отрезков, соединяющих начало координат с примитивными точками целочисленной решетки.

Ключевые слова: *целочисленная решетка, суммы Клостермана.*

Пусть на плоскости Oxy в полярных координатах заданна область

$$\Omega = \{(r, \varphi) : 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)/\cos\varphi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4\}, \tag{1}$$

где $r(\varphi) \in C[0, \pi/4]$. Для произвольного $R \geqslant 1$ определим область

$$\Omega_R = \{(Rx, Ry) : (x, y) \in \Omega\}$$

и обозначим через $\mathcal{F}(\Omega, R)$ множество видимых (примитивных) точек решетки $\mathbb{Z}^2$, лежащих в Ω_R:

$$\mathcal{F}(\Omega, R) = \{(x, y) \in \Omega_R \cap \mathbb{Z}^2 : (x, y) = 1\}.$$

Пусть $N = N(R) = \#\mathcal{F}(\Omega, R)$ — число элементов в множестве $\mathcal{F}(\Omega, R)$ и $A_j(x_j, y_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$ — точки $\mathcal{F}(\Omega, R)$, занумерованные так, что соответствующие им углы $\theta_j = \operatorname{arctg} y_j/x_j$ образуют возрастающую последовательность

$$0 \leqslant \theta_1 < \ldots < \theta_N \leqslant \pi/4.$$

В работе [5] изучено распределение углов $\theta_2 - \theta_1, \ldots, \theta_N - \theta_{N-1}$ между соседними лучами, проведенными из начала координат в точки множества $\mathcal{F}(\Omega, R)$. После естественной нормировки получаются величины $N(\theta_2 - \theta_1), \ldots, N(\theta_N - \theta_{N-1})$, для которых доказано существование предельной плотности распределения, вычисляемой явно (см [5]).

Оказывается, что естественней рассматривать задачу о совместном распределении расстояний d_j, d_{j+1} $(1 \leqslant j \leqslant N-1)$, где $d_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}$. Величины $\theta_{j+1} - \theta_j$ можно интерпретировать как углы в фундаментальных параллелограммах решетки $\mathbb{Z}^2$ со сторонами d_j, d_{j+1}; таким образом, $d_j d_{j+1} \sin(\theta_{j+1} - \theta_j) = 1$. Поэтому вопрос о распределении углов между соседними лучами легко решается, если известно совместное распределение длин отрезков.

Пусть α_0, $\beta_0 \in [0, 1]$, $\varphi_0 \in [0, \pi/4]$, $R \geqslant 1$ и $\widetilde{R}(\varphi) = R \cdot r(\varphi)/\cos\varphi$. Рассмотрим сумму

$$\Phi(R) = \Phi(\varphi_0, \alpha_0, \beta_0; R) = \sum_{j=1}^{N-1} [d_j \leqslant \alpha_0 \widetilde{R}(\theta_j), d_{j+1} \leqslant \beta_0 \widetilde{R}(\theta_{j+1}), \theta_{j+1} \leqslant \varphi_0)],$$

* Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 680000, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: `ustinov@iam.khv.ru`

где $[A]=1$, если утверждение A истинно, и $[A]=0$ в противном случае. Таким образом, сумма $\Phi(R)$ равна числу лежащих на плоскости Oxy внутри угла $\operatorname{arctg} y/x \leqslant \varphi_0$ фундаментальных параллелограммов, у которых нормированные стороны $d_j \widetilde{R}^{-1}(\theta_j)$, $d_{j+1}\widetilde{R}^{-1}(\theta_{j+1})$ не превосходят α_0 и β_0 соответственно. Положим

$$N_{\varphi_0}(R) = \#\{(x,y)\in\mathcal{F}(\Omega,R) : \operatorname{arctg} y/x \leqslant \varphi_0\} = \sum_{j=0}^{N-1}[\theta_{j+1}\leqslant\varphi_0].$$

Тогда будет выполняться асимптотическая формула

$$\frac{\Phi(R)}{N_{\varphi_0}(R)} = 2\int_0^{\alpha_0}\int_0^{\beta_0}[\alpha+\beta\geqslant 1]d\alpha\, d\beta + O(R^{-\Delta}) \qquad (\Delta>0),$$

в которой поведение остаточного члена зависит от свойств функции $r(\varphi)$. При этом плотность, стоящая под знаком интеграла, не зависит от направления (угла φ_0), то есть в рассматриваемой задаче целочисленная решетка демонстрирует свойство асимптотической изотропности, которое наблюдается и в других случаях (см, например, [1, 2]).

В этой статье рассматривается случай треугольной области, для которого удается получить корневое понижение в остаточном члене.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех целочисленных матриц $S=\left(\begin{smallmatrix}P & P'\\ Q & Q'\end{smallmatrix}\right)$ с определителем $\det S=\pm1$, у которых

$$1\leqslant Q\leqslant Q',\quad 0\leqslant P\leqslant Q,\quad 1\leqslant P'\leqslant Q'.$$

Оно разбивается на два непересекающихся подмножества $\mathcal{M}_+$ и $\mathcal{M}_-$, состоящих из матриц с определителями $+1$ и -1 соответственно.

Каждой паре точек $(A_j, A_{j+1})\in\mathcal{F}^2(\Omega,R)$ можно поставить в соответствие матрицу $S\in\mathcal{M}$ по правилу

$$S=\begin{cases}\begin{pmatrix}y_j & y_{j+1}\\ x_j & x_{j+1}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_-, & \text{если } x_{j+1}\geqslant x_j;\\[2mm] \begin{pmatrix}y_{j+1} & y_j\\ x_{j+1} & x_j\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_+, & \text{если } x_{j+1}< x_j.\end{cases}$$

Наоборот, матрице $S=\left(\begin{smallmatrix}P & P'\\ Q & Q'\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}$ можно поставить в соответствие пару точек $(A,B)=((Q',P'),(Q,P))$, если $\det S=1$, и пару $(A,B)=((Q,P),(Q',P'))$, если $\det S=-1$. Полученные при этом точки $A(x_A,y_A)$ и $B(x_B,y_B)$ будут лежать в $\mathcal{F}(\Omega,R)$, если

$$\sqrt{x_A^2+y_A^2}\leqslant\widetilde{R}\left(\operatorname{arctg}\frac{y_A}{x_A}\right),\quad \sqrt{x_B^2+y_B^2}\leqslant\widetilde{R}\left(\operatorname{arctg}\frac{y_B}{x_B}\right),$$

что равносильно неравенствам

$$x_A\leqslant R\left(\operatorname{arctg}\frac{y_A}{x_A}\right),\quad x_B\leqslant R\left(\operatorname{arctg}\frac{y_B}{x_B}\right),$$

где $R(\varphi)=R\cdot r(\varphi)=\widetilde{R}(\varphi)\cos\varphi$. Лучи, проходящие через A и B, будут соседними при условии

$$x_A+x_B>R\left(\operatorname{arctg}\frac{y_A+y_B}{x_A+x_B}\right).$$

Поэтому сумму $\Phi(R)$ можно представить в виде

$$\Phi(R)=\Phi_+(R)+\Phi_-(R),$$

где

$$\Phi_+(R) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_+} [Q' \leqslant \alpha_0 R(\varphi'), Q \leqslant \beta_0 R(\varphi), Q + Q' > R(\varphi''), \varphi \leqslant \varphi_0],$$

$$\Phi_-(R) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_+} [Q \leqslant \alpha_0 R(\varphi), Q' \leqslant \beta_0 R(\varphi'), Q + Q' > R(\varphi''), \varphi' \leqslant \varphi_0], \qquad (2)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{P}{Q}, \quad \varphi' = \operatorname{arctg} \frac{P'}{Q'}, \quad \varphi'' = \operatorname{arctg} \frac{P+P'}{Q+Q'}.$$

Для натурального q через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q:

$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod p] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod q; \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod q; \end{cases}$$

$\sigma_\alpha(q)$ — сумма степеней делителей натурального q:

$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha.$$

Из оценки сумм Клостермана

$$\left| \sum_{x,y=1}^{q} \delta_q(xy-1) e^{2\pi i \frac{mx+ny}{q}} \right| \leqslant \sigma_0(q) \cdot (m,n,q)^{1/2} \cdot q^{1/2},$$

принадлежащей Эстерману (см [6]), вытекает следующее утверждение [4, Теорема 1].

Лемма 1. *Пусть $q \geqslant 1$ — натуральное, Q_1, Q_2, P_1, P_2 — вещественные и $0 \leqslant P_1, P_2 \leqslant q$. Тогда*

$$\sum_{\substack{Q_1 < u \leqslant Q_1 + P_1 \\ Q_2 < v \leqslant Q_2 + P_2}} \delta_q(uv \pm 1) = \frac{\varphi(q)}{q^2} \cdot P_1 P_2 + O\left(\sigma_0(q) \log^2(q+1) q^{1/2}\right).$$

Применим лемму 1 для вычисления суммы $\Phi(R)$.

Лемма 2. *Пусть $R \geqslant 2$. Тогда*

$$\Phi_-(R) = \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot S^*_-(R) + O(R^{3/2} \log^3 R),$$

где

$$S^*_-(R) = \sum_{q \leqslant R} \varphi(q) \int_0^1 [y \leqslant \alpha_0 R/q, 1 \leqslant \beta_0 R/q, y + 1 > R/q] dy. \qquad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В сумме (2), задающей $\Phi_-(R)$, при фиксированном значении $Q' = q$ переменные P' и Q должны быть решениями сравнения $uv \equiv 1 \pmod q$. Значение P при известных Q', P' и Q находится однозначно: $P = (P'Q - 1)/Q' = (uv-1)/q$. Поэтому сумму $\Phi_-(R)$ можно переписать в виде

$$\Phi_-(R) = \sum_{q \leqslant R} \sum_{u,v=1}^{q} \delta_q(uv-1)[v \leqslant \alpha_0 R, q \leqslant \beta_0 R, v + q > R, u \leqslant u_0],$$

где u_0 определяется из условия $\operatorname{tg} \varphi_0 = u_0/q$. По лемме 1

$$\Phi_-(R) = \sum_{q \leqslant R} \left(\frac{\varphi(q)}{q^2} \int_0^q \int_0^q [v \leqslant \alpha_0 R, q \leqslant \beta_0 R, v + q > R, u \leqslant u_0] \, du \, dv + O(q^{1/2} \sigma_0(q) \log^2(q+1) \right).$$

С помощью стандартной формулы

$$\sum_{q\leqslant R}\sigma_0(q)\ll R\log R$$

и преобразования Абеля приходим к оценке остаточного члена

$$\sum_{q\leqslant R}q^{1/2}\sigma_0(q)\log^2(q+1)\ll R^{3/2}\log^3 R.$$

После замены переменных $u=q$, $v=qy$ получаем равенство

$$\Phi_-(R)=\sum_{q\leqslant R}\varphi(q)\int_0^1\int_0^1[y\leqslant\alpha_0R/q,1\leqslant\beta_0R/q,y+1>R/q,x\leqslant u_0/q]\,dx\,dy+O(R^{3/2}\log^3 R).$$

Интегрируя его по переменной x, приходим к утверждению леммы.

Лемма 3. *Пусть α_0, $\beta_0\in[0,1]$ и $R\geqslant 2$. Тогда для суммы $S_-^*(R)$, определенной равенством* (3), *выполняется асимптотическая формула*

$$S_-^*(R)=\frac{R^2}{\zeta(2)}\int_0^{\alpha_0}\int_0^{\beta_0}[\beta\geqslant\alpha,\alpha+\beta\geqslant 1]\,d\alpha\,d\beta+O(R\log R).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь равенством

$$\varphi(q)=q\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d},$$

для суммы $S_-^*(R)$ получаем представление

$$S_-^*(R)=\sum_{d\leqslant R}\mu(d)S_-(R/d), \tag{4}$$

где

$$S_-(R)=\sum_{q\leqslant R}q\int_0^1[y\leqslant\alpha_0R/q,1\leqslant\beta_0R/q,y+1>R/q]\,dy.$$

Внося суммирование под знак интеграла, находим

$$\begin{aligned}S_-(R)=&\int_0^1 dy\left[\frac{1}{\beta_0}-1\leqslant y\leqslant\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right]\sum_{q\leqslant R}q\left[\frac{R}{y+1}<q\leqslant\min\left\{\frac{\alpha_0R}{y},\beta_0R\right\}\right]=\\ =&\frac{R^2}{2}I(\alpha_0,\beta_0)+O(R),\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^1\left[\frac{1}{\beta_0}-1\leqslant y\leqslant\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right]\left(\left(\min\left\{\frac{\alpha_0}{y},\beta_0\right\}\right)^2-\frac{1}{(y+1)^2}\right)dy.$$

Полученный интеграл вычисляется непосредственно. В зависимости от параметров результат выглядит следующим образом:

$$I(\alpha,\beta)=\begin{cases}0, & \text{если } \beta\leqslant 1/2 \text{ или } \alpha+\beta<1;\\ 2(\beta-\frac{1}{2})^2, & \text{если } \beta\geqslant 1/2,\alpha\geqslant\beta;\\ 2(\beta-\frac{1}{2})^2-(\alpha-\beta)^2, & \text{если } \alpha\geqslant 1/2,\beta\geqslant\alpha;\\ (\alpha+\beta-1)^2, & \text{если } \alpha\leqslant 1/2,\beta+\alpha\geqslant 1.\end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 I(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta}=2[\beta\geqslant\alpha,\alpha+\beta\geqslant 1],\qquad I(\alpha_0,\beta_0)=2\int_0^{\alpha_0}\int_0^{\beta_0}[\beta\geqslant\alpha,\alpha+\beta\geqslant 1]\,d\alpha\,d\beta.$$

Подставляя равенство (5) в (4), приходим к утверждению леммы.

Замечание. *Аналогичные рассуждения показывают, что при $R\geqslant 2$ для суммы $\Phi_+(R)$ выполняется асимптотическая формула*

$$\Phi_+(R)=\operatorname{tg}\varphi_0\cdot S_+^*(R)+O(R^{3/2}\log^3 R),$$

где

$$\begin{aligned}S_-^*(R)=&\sum_{q\leqslant R}\varphi(q)\int_0^1[y\leqslant\beta_0R/q,1\leqslant\alpha_0R/q,y+1>R/q]dy=\\ =&\frac{R^2}{\zeta(2)}\int_0^{\alpha_0}\int_0^{\beta_0}[\alpha\geqslant\beta,\alpha+\beta\geqslant 1]\,d\alpha\,d\beta+O(R^{3/2}\log^3 R).\end{aligned}$$

Теорема. *Пусть Ω — треугольник, задаваемый равенством* (1), *с $r(\varphi)\equiv 1$. Тогда при любых α_0, $\beta_0\in[0,1]$, $\varphi_0\in[0,\pi/4]$, $R\geqslant 2$ справедлива асимптотическая формула*

$$\frac{\Phi(R)}{N_{\varphi_0}(R)}=2\int_0^{\alpha_0}\int_0^{\beta_0}[\alpha+\beta\geqslant 1]\,d\alpha\,d\beta+O(R^{-1/2}\log^3 R).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь леммами 2 и 3, для суммы $\Phi_-(R)$ получаем асимптотическую формулу

$$\Phi_-(R)=\operatorname{tg}\varphi_0\frac{R^2}{\zeta(2)}\int_0^{\alpha_0}\int_0^{\beta_0}[\beta\geqslant\alpha,\alpha+\beta\geqslant 1]\,d\alpha\,d\beta+O(R^{3/2}\log^3 R).$$

С учетом сделанного замечания

$$\Phi_+(R)=\operatorname{tg}\varphi_0\frac{R^2}{\zeta(2)}\int_0^{\alpha_0}\int_0^{\beta_0}[\beta\leqslant\alpha,\alpha+\beta\geqslant 1]\,d\alpha\,d\beta+O(R^{3/2}\log^3 R).$$

Поэтому

$$\Phi(R)=\Phi_+(R)+\Phi_-(R)=\operatorname{tg}\varphi_0\frac{R^2}{\zeta(2)}\int_0^{\alpha_0}\int_0^{\beta_0}[\alpha+\beta\geqslant 1]\,d\alpha\,d\beta+O(R^{3/2}\log^3 R).$$

Поскольку (см [3, гл. II, зад. 21])

$$N_{\varphi_0}(R)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{2\zeta(2)}R^2+O(R\log R),$$

то для искомого отношения окончательно находим

$$\frac{\Phi(R)}{N_{\varphi_0}(R)}=2\int_0^{\alpha_0}\int_0^{\beta_0}[\alpha+\beta\geqslant 1]\,d\alpha\,d\beta+O(R^{-1/2}\log^3 R).$$

Список литературы

1. *Быковский В. А., Устинов А. В* Статистика траекторий частиц для однородной двумерной модели “Периодический газ Лоренца”. — Функц. анализ и приложения, **42**: 3 (2008), 10–22.

2. *Быковский В. А., Устинов А. В* Статистика траекторий частиц в неоднородной задаче Синая для двумерной решетки. — Известия РАН, серия математическая, **73**: 4 (2009), 17–36.

3. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. — М.: Наука, 1972.

4. *Устинов А. В.* О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции. — Алгебра и анализ, **20**: 5 (2008), 186–216.

5. *Boca F. P., Cobeli C., Zaharescu A.* Distribution of lattice points visible from the origin. — Comm. Math. Phys., **20** (2000), 433–470.

6. *Estermann T.* On Kloosterman’s sum. — Mathematika, **8** (1961), 83–86.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 25 мая 2009 г.

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант № 09-01-00371, проекта ДВО РАН 09-I-П4-03, Фонда «Династия» и Фонда содействия отечественной науке

Ustinov A.V. On the distribution of integer points. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 176–181.

ABSTRACT

We study distribution of distances from primitive integer points to the origin.

Key words: *Kloosterman sums, integer lettice.*